

Théorie des moteurs de fusée à propulseur solide

Par Richard Nakka
Traduit de l'anglais par Alexandre Burelle

Note du traducteur

Le document suivant est une traduction de la section théorique de la page Web de construction de fusées expérimentales amateurs de Richard Nakka (www.nakka-rocketry.net).

Tout le matériel ici présenté relève de l'autorité de Richard Nakka, à moins que le contraire soit spécifié. Toute l'information dans ce document est seulement présentée avec des fins informatives. Ni l'auteur ni le traducteur n'assument aucune responsabilité de l'utilisation qui peut être donnée à l'information ici offerte.

1.1 Introduction à la théorie du moteur de fusée solide

Le but premier de la théorie du moteur de fusée solide est de présenter la base théorique du fonctionnement d'un moteur de fusée solide. L'emphase est placée sur la théorie puisqu'elle s'applique à de relativement petits moteurs amateurs, qui sont généralement de performance et d'efficacité inférieures à leurs cousins professionnels. En certains égards, les méthodes standard doivent être modifiées pour prendre ces facteurs en considération.

Le but secondaire est de présenter des outils fondamentaux qui pourraient être utilisés dans la création de moteurs de fusées amateurs.

J'essaierai de suivre un chemin logique dans cette présentation, un thème menant à l'autre. Commençant par les **suppositions de base** qui doivent être faites afin de simplifier la nature hautement complexe du fonctionnement d'un moteur de fusée. Le **propulseur** est ensuite discuté, bien que seulement les aspects qui ont une application directe à la théorie du moteur de fusée. Par exemple, les propulseurs sont considérés comme un mélange de carburant et d'oxydant, sans considérer leur formulation spécifique. La forme dans laquelle est saisi le propulseur a un impact direct et important sur les caractéristiques globales de la performance du moteur.

Comme l'opération fondamentale du moteur de fusée requiert que le propulseur soit brûlé, le thème qui suit porte sur le procédé de la **combustion**. En d'autres mots, la conversion du propulseur en gaz de haute température et en particules condensées (fumée). Cette combustion doit arriver de telle manière à atteindre certaines conditions d'opération – un certain profil de poussée sur un certain temps de combustion, tout en opérant sous une certaine pression et température. Enfin, le taux de combustion, la température de combustion et les produits de combustion jouent tous un rôle crucial pour établir la performance d'un moteur de fusée.

Presque certainement la partie la plus critique du moteur de fusée solide est la **tuyère**. La tuyère fait en sorte que « ça passe ou ça casse » pour un moteur de fusée, assez littéralement. Mais qu'est-ce que fait exactement une tuyère, et comment? Quelle est l'importance des profils convergents et divergents? Ces questions seront considérées dans la section Théorie de la tuyère.

L'expulsion des produits d'échappement à travers la tuyère à haute vitesse produit une poussée, la « force » d'un moteur de fusée. La **poussée** peut être mesurée de manière assez simple, mais comment peut-on prédire une poussée théoriquement pour un certain design de moteur de fusée? Les sections qui suivent discutent les moyens de calculer la poussée, ainsi que l'**impulsion** totale et l'impulsion spécifique. Ces deux derniers sont particulièrement utiles pour calculer la puissance de propulsion d'un moteur et la « valeur » d'un certain propulseur à ce regard.

N'importe qui qui a une familiarité avec les moteurs de fusée sait qu'ils opèrent sous une situation de haute pression. C'est la **pression de la chambre**, produite par la combustion

du propulseur, qui force l'échappement hors du moteur via la tuyère. Contrôler cette pression est la clé à des moteurs plus performants et plus sécuritaires aux niveaux du design et de l'opération. Quels paramètres déterminent la pression, qui peut être considérée assez justement comme une « explosion contrôlée » à l'intérieur de la chambre à combustion?

Le thème final de la théorie du moteur de fusée porte sur les **corrections** qui doivent être considérées afin de faire rejoindre les prédictions théoriques avec les vrais résultats qui seront obtenus avec un moteur véritable. Ces corrections sont un résultat direct du premier thème discuté, c'est-à-dire les suppositions simplificatrices qui ont été faites pour rendre une telle analyse possible.

1.2 Suppositions de base

Les différents procédés physiques et chimiques qui surviennent dans un moteur de fusée durant son opération sont extrêmement complexes. Ces procédés incluent les réactions chimiques complexes qui surviennent lors de la combustion; la manière de laquelle la « consommation » du grain de propulseur se produit au cours de la combustion; le comportement du écoulement de gaz d'échappements lorsque ceux-ci forment à la surface de combustion, voyagent à travers la chambre et sortent à travers la tuyère; l'interaction entre les gaz d'échappement et les particules condensées (fumée). L'analyse théorique d'un moteur de fusée solide nécessite quelques simplifications, alors on le considère comme un moteur de fusée idéal. Un moteur de fusée idéal est défini par ce qui suit :

- La combustion du propulseur est complète et ne varie pas de ce que prédit l'équation de la combustion.
- Les produits de la combustion obéissent à la loi des gaz parfaits.
- Il n'existe pas de frottement dû au écoulement des produits d'échappement.
- La combustion et le écoulement dans le moteur et la tuyère sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de chaleur due à l'environnement.
- À moins d'indication contraire, des conditions d'un état stable existent au cours de l'opération du moteur. Ceci veut dire que les conditions ou procédés qui surviennent ne changent pas avec le temps (pour des conditions géométriques données) durant la combustion.
- L'expansion des produits d'échappement a lieu de manière uniforme sans choc ni discontinuités.
- Le écoulement à travers la tuyère est unidimensionnel et sans mouvement de rotation.
- La vitesse, la pression et la densité du écoulement est uniforme à travers n'importe quel coupe perpendiculaire à l'axe de la tuyère.
- L'équilibre chimique est établi dans la chambre de combustion et ne varie pas durant la traversée de la tuyère.
- La combustion du grain de propulseur est toujours perpendiculaire à la surface de combustion et a lieu de manière uniforme sur la surface entière exposée à la combustion.

Toute supposition supplémentaire qui sera de mise sera dictée lorsque nécessaire durant les prochaines analyses. Bien qu'il semble avoir eu beaucoup de suppositions simplificatrices, celles-ci sont toutes raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent le véritable comportement du moteur de fusée assez précisément.

1.3 Grain de propulseur

Le propulseur utilisé dans des moteurs de fusées expérimentaux amateurs peut être simple en composition, composé de deux constituants principaux : le carburant et l'oxydant. Ainsi est le cas des propulseurs à base de sucre. Des propulseurs expérimentaux composés, au contraire, peuvent avoir une composition plutôt complexe et peut contenir des oxydants variés et même des métaux tels que l'aluminium et le magnésium. Des agents à curer, stabilisateurs de phase et des solvants peuvent être des additifs ajoutés en petits pourcentages.

Pour n'importe quel propulseur, un additif peut contrôler le taux de combustion, que ce soit pour l'augmenter ou le diminuer. Un opacifiant peut être ajouté pour absorber la chaleur qui sinon pourrait être transmis au travers un grain translucide, résultant en une combustion imprédictible. Peu importe leur composition, tous les propulseurs sont moulés dans une forme géométrique de base que nous nommons le grain. Par convention, tous les grains de propulseurs sont cylindriques afin de maximiser l'efficacité volumétrique. Le grain peut être constitué d'un simple segment cylindrique (Figure 1), ou peut contenir plusieurs segments. Habituellement, un noyau central qui s'étend sur toute la longueur du grain est voulu, afin d'augmenter la surface du propulseur initialement exposée à la combustion.

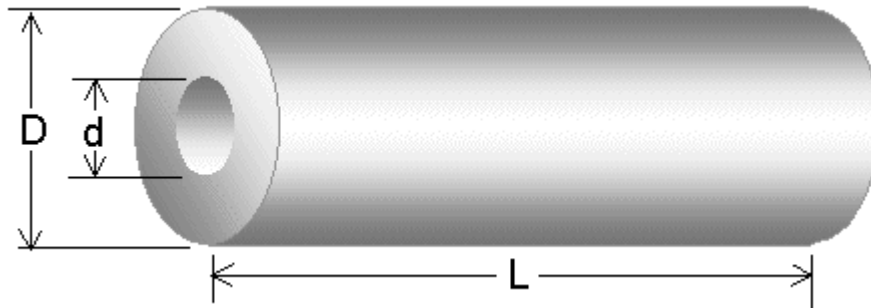


Figure 1 – Grain cylindrique creux

Le noyau peut avoir une variété de formes telles que circulaire, étoilée, en croix, etc. Par contre, la forme circulaire est la plus utilisée pour des moteurs amateurs. La forme du noyau a une influence profonde sur la fonction de la poussée par rapport au temps, comme le montre la Figure 2.

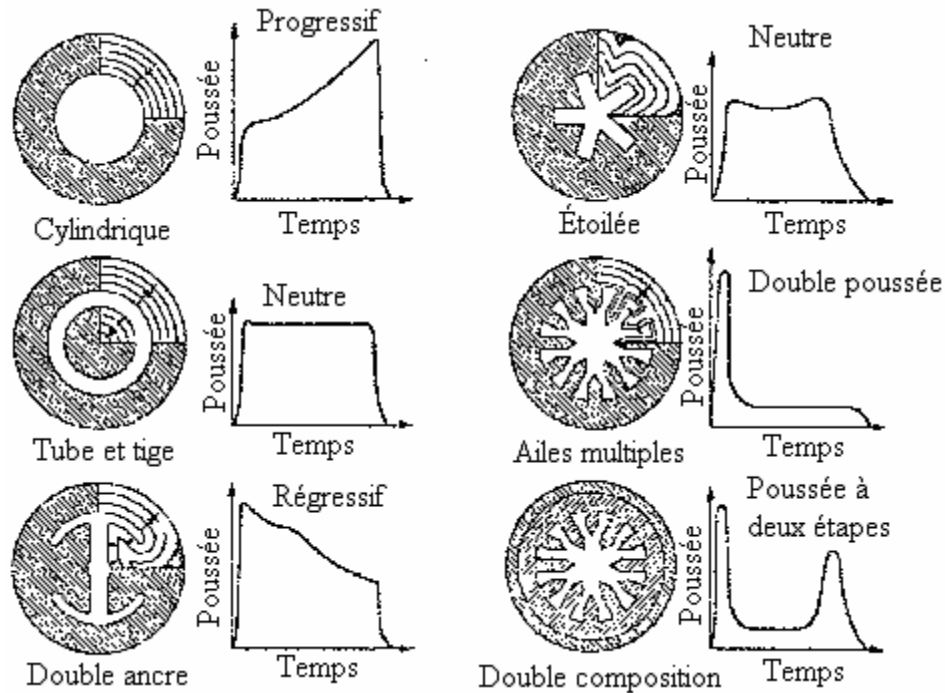


Figure 2 – Forme de noyaux et leur influence sur la fonction de poussée

Comment la forme du noyau influence-t-elle la courbe de la poussée par rapport au temps? La poussée (et la pression de la chambre) qu'une fusée génère est proportionnelle à la surface de combustion à n'importe quel instant dans le temps. Ceci est appelé la surface de combustion instantanée. À n'importe quel moment, la surface de combustion diminue selon la normale (perpendiculaire) de la surface à ce point, résultant en une relation entre la surface de combustion et le volume brûlé qui dépend quasiment entièrement de la forme initiale du grain et de la forme de l'inhibiteur. Ce concept important est illustré à la Figure 3, où les lignes de contour représentent la forme du noyau à des moments successifs durant la combustion. Remarquez que la forme de la fonction de la poussée en fonction du temps change, les lignes verticales correspondants aux mêmes moments successifs durant la combustion. Comme il peut être vu, le grain étoilé produit une combustion neutre, puisque la surface reste presque constante pour la durée de la combustion. Une combustion neutre est habituellement désirable parce qu'elle résulte en une plus grande efficacité pour l'impulsion totale, ainsi qu'une tuyère plus efficacement à une pression de chambre constante.

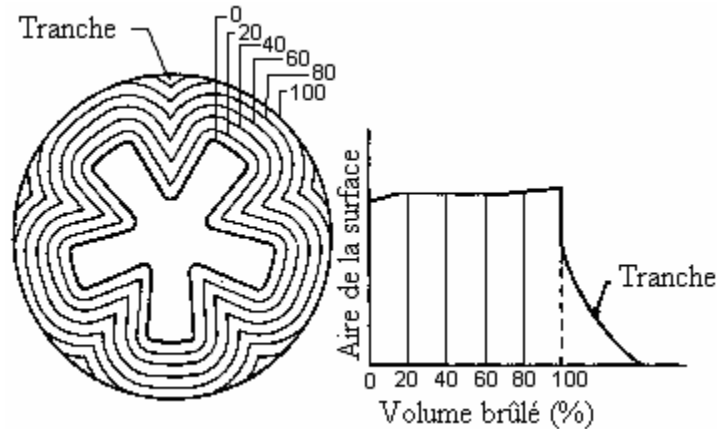


Figure 3 – Récession du grain

Il est important de reconnaître que la surface de combustion d'un grain de propulseur est un paramètre clé pour déterminer la performance d'un moteur de fusée. La fonction première d'un grain de propulseur est de produire des produits d'échappement à un écoulement défini par :

$$\dot{m}_g = A_b \rho_p r$$

où ρ_p est la densité massique du propulseur, A_b est la surface de combustion et r est le taux de combustion du propulseur. La surface totale de combustion consiste de toutes les surfaces du propulseur exposées à la combustion (et non empêchées de brûler). La surface de combustion du grain dépend de :

- La géométrie du grain, comme décrit plus haut
- L'utilisation d'inhibiteurs

Un inhibiteur est un matériel ou revêtement qui est suffisamment résistant à la chaleur pour empêcher la combustion des surfaces qu'elle protège au cours de l'opération du moteur. Les inhibiteurs typiquement utilisés pour les moteurs expérimentaux amateurs sont le papier et le carton, ou un revêtement comme le polyester ou la résine d'époxy.

Pour le design d'un moteur, nous sommes surtout intéressés à la surface de combustion maximale, puisque c'est cette aire qui détermine la pression maximale de la chambre que le moteur aura à contenir. La pression maximale de la chambre est utilisée pour déterminer la grosseur de la paroi du moteur. Pour un moteur sans restriction, toutes les surfaces sont exposées aux gaz chauffés et la combustion part de toutes la surface au début de la combustion. Pour un grain « BATES » (Figure 4), qui a de multiples segments, un noyau cylindrique et est lié à la paroi ou à un inhibiteur à sa surface externe, la surface de combustion initiale est la surface du noyau et des bouts des segments.

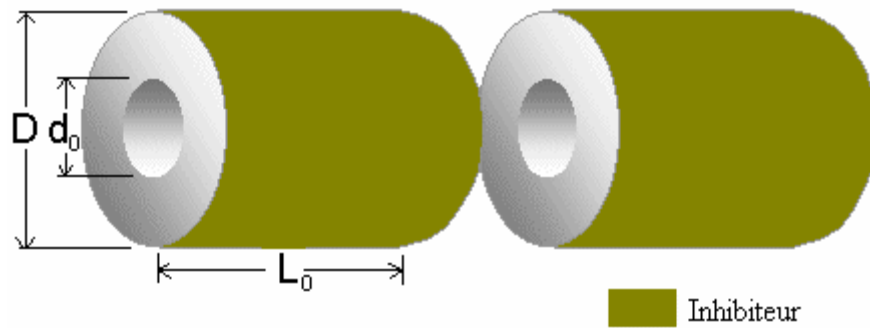


Figure 4 – Grain BATES

Une configuration de grain BATES est souvent employée dans les moteurs amateurs, puisqu'un tel grain peut avoir une combustion approximativement neutre en choisissant les rapports L_0/D et D/d_0 appropriés.

Une importante propriété physique du grain de propulseur est la densité massique, qui est utilisée dans les calculs de performance. Si un propulseur est fait de deux constituants, un oxydant et un carburant, la densité idéale est donnée par :

$$\rho_p = \frac{1}{\frac{f_o}{\rho_o} + \frac{f_f}{\rho_f}}$$

où le symbole ρ (rhô) est la densité, f est la fraction de masse et o et f réfèrent à l'oxydant et le carburant, respectivement. Si un propulseur est fait de plus de deux constituants, alors la densité idéale est donnée par (où a, b, c, \dots sont les constituants individuels) :

$$\rho_p = \frac{1}{\frac{f_a}{\rho_a} + \frac{f_b}{\rho_b} + \frac{f_c}{\rho_c} + \dots}$$

Dans le Tableau 1, on donne la densité pour certains oxydants et carburants. La densité réelle peut être obtenue en mesurant la masse d'un grain et son volume.

Tableau 1

Densité massique de certains oxydants					
Oxydant solide	Formule	Densité			
		g/cm³	kg/m³	lb/in³	slug/in³
Nitrate de potassium	KNO ₃	2,109	2109	0,0762	0,002366
Nitrate d'ammonium	NH ₄ NO ₃	1,725	1725	0,0623	0,001935
Perchlorate de potassium	KClO ₄	2,520	2520	0,0910	0,002827
Perchlorate d'ammonium	NH ₄ ClO ₄	1,950	1950	0,0704	0,002188
Nitrate de sodium	NaNO ₃	2,261	2261	0,0817	0,002537
Perchlorate de sodium	NaClO ₄	2,018	2018	0,0729	0,002264
Perchlorate de nitronium	NO ₂ ClO ₄	2,198	2198	0,0794	0,002466

Densité massique de certains carburants					
Carburant solide	Formule	Densité			
		g/cm³	kg/m³	lb/in³	slug/in³
Saccharose	C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁	1,5805	1581	0,0571	0,001773
Dextrine	C ₆ H ₁₂ O ₆	1,562	1562	0,0564	0,001752
Sorbitol	C ₆ H ₁₄ O ₆	1,489	1489	0,0538	0,001671
Aluminium	Al	2,70	2700	0,0975	0,003029
PVC	-	*1,38	1380	0,0499	0,001548

* Valeur moyenne. Peut varier de 1,25 à 1,5

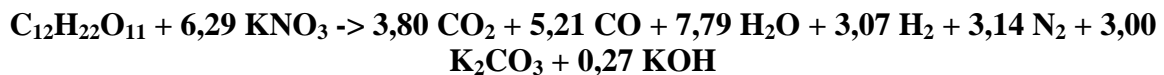
Références :

1. Merck Index, 7^e Édition
2. CRC Hdbk. Of Chemistry and Physics, 54^e Édition
3. Sutton, Rocket Propulsion Elements, 5e Édition
4. www.matweb.com

1.4 Combustion du propulseur

Un moteur de fusée fonctionne selon le principe de la transformation de l'énergie calorifique, produite de réactions chimiques, en énergie cinétique. En d'autres mots, la chaleur libérée par la combustion du propulseur fournit l'énergie calorifique ; les gaz d'échappements qui quittent la tuyère en un écoulement de haute vitesse ont acquis de l'énergie cinétique. Ceci explique pourquoi les produits d'échappement baissent considérablement de température lorsqu'ils passent la tuyère, comme le prédit la loi de la thermodynamique de la conservation de l'énergie.

La combustion est « tout simplement » une réaction chimique exothermique. Pour partir la combustion, une source de chaleur extérieure est requise (la bougie) pour fournir l'énergie d'activation. La combustion peut être représentée par une équation chimique. Par exemple, pour un ratio de 65/35 Oxydant/Carburant du propulseur KNO₃/Saccharose, l'équation de combustion est :



où les composés sont symbolisés ainsi :

Saccharose	solide	C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁
Nitrate de potassium	solide	KNO ₃
Dioxyde de carbone	gaz	CO ₂
Monoxyde de carbone	gaz	CO
Vapeur d'eau	gaz	H ₂ O
Hydrogène	gaz	H ₂
Azote	gaz	N ₂
Carbonate de potassium	liquide	K ₂ CO ₃
Hydroxyde de potassium	liquide	KOH

De petites quantités de d'autres composés comme KH et CH₄ sont présentes, mais peuvent être négligées sans conséquence considérable. La dérivation de l'équation de combustion complète est possiblement l'étape la plus complexe de l'analyse d'un moteur de fusée. Le propulseur est brûlé à pression constante (théoriquement) et forme une série de produits moléculaires qui sont en équilibre thermique et chimique entre eux. La première étape est de supposer quels pourraient être les produits de la combustion. Pour un propulseur qui contient seulement du carbone, de l'oxygène, de l'hydrogène et de l'azote (C, O, H et N) il existe (au moins) douze produits possibles – le carbone, le dioxyde de carbone, le monoxyde de carbone, l'hydrogène, la vapeur d'eau, l'oxygène, l'azote, l'oxyde d'azote et les produits de dissociation H, O, N et OH. Si le propulseur contient des éléments métalliques tels le potassium (K), le sodium (NA) ou l'aluminium (Al), ou contient du chlore (Cl), on obtiendra des produits de combustion condensés (solides ou liquides), comme le carbonate de potassium (ou les équivalents du sodium), l'oxyde d'aluminium ou le chlorure de potassium (KCl).

Une fois qu'une série de produits possibles a été établie, la prochaine étape est de déterminer les nombres de moles qui résulteront de la réaction. Les nombres de moles sont les coefficients dans une réaction chimique. Pour l'exemple ci haut, les nombres de moles sont 3,67 , 5,19 , 7,91 , 3,09 , 3,14 et 3,14 pour le CO₂, le CO, le H₂O, le H₂, le N₂ et le K₂CO₃ respectivement, pour une combustion totale des réactifs, qui sont 1 mole de saccharose et 6,29 moles de KNO₃.

La détermination des nombres de moles est accomplie par la résolution simultanée d'une série d'équations qui relient les réactifs et les produits en respectant les conditions de :

- L'équilibre de masse
- Les conditions d'équilibre chimique
- L'équilibre d'énergie

L'équilibre de masse est assez simple, et réfère au principe de la conservation de la masse. Le nombre de moles de n'importe quel élément avant une réaction chimique doit être égal au nombre de moles après la réaction. Dans l'exemple précédent, les nombres de moles des réactifs sont :

12 de carbone, 22 d'hydrogène, 29,87 d'oxygène, 6,29 de potassium et 6,29 d'azote

et dans les produits :

12 de carbone, 22 d'hydrogène, 29,87 d'oxygène, 6,29 de potassium et d'azote

L'équilibre de masse est respecté.

Plusieurs réactifs, quand mélangés en quantités définies, réagissent pour former des produits seulement, dans une réaction dite irréversible. Un exemple est la combustion d'un propulseur. Dans une réaction réversible, le processus peut aller d'un côté ou de l'autre. Les réactifs forment des produits au même rythme que les produits forment les réactifs initiaux. Ceci est un type de réaction où les conditions d'équilibre chimique des produits de combustion sont concernées. Par exemple, la réaction



Mais qu'est-ce qui détermine la concentration relative de ces constituants (qui fera en sorte que la réaction se fera plus à la droite ou à la gauche de l'équation) ? Pour chaque équation comme celle-ci, il y a une constante d'équilibre (K_p) associée qui la détermine. Cette constante est une fonction de la température à laquelle la réaction se produit et est essentiellement indépendante des autres conditions physiques, comme la pression. Les valeurs pour différentes constantes d'équilibre peuvent être trouvées dans des tables thermochimiques, comme les tables JANAF. Pour la réaction réversible générique :

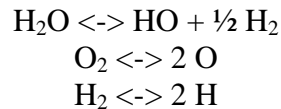


L'équation de l'équilibre chimique est de cette forme:

$$K_p = \frac{y_C^{1C} y_D^{1D}}{y_A^{1A} y_B^{1B}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1C+1D-1A-1B}$$

où y est la fraction molaire d'équilibre des constituants A, B, C et D, ν est le coefficient pour chaque constituant (2,1 et 2 dans l'exemple précédent pour les constituants H₂, O₂ et H₂O).

Le terme P/P_0 représente le taux de pression auquel la réaction a lieu et à la pression de référence (298 K). Il est à noter que l'équilibre des gaz d'échappement est très sensible à la température. Les produits formés à haute température sont très différents de ceux formés à basse température. À haute température (au-delà de 3000 K), il y a occurrence de dissociation des produits, puisque l'énergie thermique provoque une rupture des liaisons intramoléculaires, comme suit :



À des températures de combustion plus basses, des quantités négligeables de ces constituants se forment. La dissociation moléculaire consomme de l'énergie qui serait autrement disponible pour être converti en énergie cinétique, et tend à limiter la température de combustion.

Avec la supposition de combustion adiabatique (aucune chaleur n'est perdue) et la supposition qu'il n'y a aucun changement quant aux énergies potentielles et cinétiques, la loi de la conservation de l'énergie dit que l'enthalpie des réactifs est égal à l'enthalpie des produits.

$$H_R = H_P$$

L'enthalpie peut être vue comme la chaleur associée à une réaction chimique. Considérons une réaction où il y a n moles de chaque réactif (représentés par i) et n moles de chaque produit (représentés par e)

$$\sum_R n_i [h_f + \Delta h]_i = \sum_P n_e [h_f + \Delta h]_e$$

L'équation ci haut nous dit que la somme de l'enthalpie de formation (h_f) additionnée à la variation d'enthalpie (Δh), multipliée par le nombre de moles (n) de chaque constituant, est égal pour les réactifs et les produits. Notez que Δh représente le changement en enthalpie par rapport à une température référence, typiquement 298 K. Pour cette raison, Δh est égal à zéro pour les réactifs si la température initiale du propulseur est suppose être la température de référence.

h_f et Δh pour les réactifs et les produits peuvent être trouvés dans un tableau thermochimique, tels le JANAF ou le NIST Chemistry WebBook.

L'équation précédente est particulièrement utile, puisqu'elle nous donne un moyen de calculer la température de combustion, qui est habituellement appelé la température adiabatique de la flamme (TAF). Aussi, de cette équation, on peut voir qu'une plus grande chaleur de formation des réactifs (par masse unitaire) est désirable, tout comme l'est une plus petite chaleur de formation des produits, puisqu'on obtiendra ainsi un plus grand Δh pour les produits (et donc une plus grande TAF). En effet, la présence de gaz diatomiques (H_2 , N_2) dans les produits est généralement désirable puisque la chaleur de formation de ces gaz est zéro.

Un exemple de calcul de la température de combustion pour KN/Saccharose, ratio de 65/35 O/C, est donné dans l'annexe A.

Ce qui précède décrit une suite complète d'information nécessaire pour déterminer le processus complet de combustion. Nous avons maintenant une série de paramètres inconnus et des équations qui permettent de trouver les inconnus. Sommairement, les paramètres inconnus sont :

1. Les nombres de moles (coefficients) dans l'équation de l'équilibre de masse
2. Les fractions de moles dans les équations d'équilibre chimique
3. La température adiabatique de la flamme
4. Les valeurs de Δh , ceux-ci étant en fonction de la température
5. La pression de la chambre à laquelle la réaction a lieu

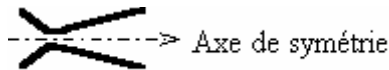
Nul besoin de le dire, ceci n'est pas une tâche facile. La seule manière pratique de résoudre le problème de combustion est grâce à un ordinateur, en utilisant une procédure itérative. Ceci implique tout d'abord estimer une pression à laquelle la combustion a lieu (les résultats ne dépendent pas fortement de la pression). Les itérations de résoudre les équations commencent à une TAF estimée. Ces deux estimations permettent aux nombres de moles et aux fractions de moles d'être déterminés pour ces conditions initiales. Basée sur ces valeurs déterminées, une nouvelle TAF est calculée en utilisant l'équation de l'énergie. Cette valeur de TAF est alors utilisée dans la prochaine itération pour calculer les nombres de moles et les fractions de moles, et ainsi de suite. Éventuellement, il y a (espérons le) convergence et la solution finale est obtenue.

Heureusement, il existe des programmes pour faire la tâche et ils le font admirablement et avec une grande flexibilité. Des exemples sont PROPEP, GUIPEP ou CET.

1.5 Théorie de la tuyère

La tuyère d'une fusée peut certainement être décrite comme étant le comble de l'élégante simplicité. La fonction première d'une tuyère est de guider et accélérer les gaz d'échappement produits par la combustion du propulseur d'une manière à maximiser la vitesse du écoulement à la sortie, à vitesse supersonique. La tuyère de fusée commune, aussi connue sous le nom de convergent divergeant ou tuyère de Laval, accomplit cet exploit formidable par simple géométrie. En d'autres mots, elle fait son travail en variant la section efficace (ou diamètre). L'analyse d'une tuyère de fusée comprend le concept d'un écoulement compressible, stable et unidimensionnel d'un gaz idéal. Brièvement, ceci veut dire que :

- Le écoulement du fluide (gaz d'échappement et particules condensées) est constant et ne varie pas selon le temps durant la combustion
- Un écoulement unidimensionnel indique que la direction du écoulement est une ligne droite. Pour une tuyère, le écoulement est supposé être le long de l'axe de symétrie.



- Le écoulement est compressible. Le concept d'un écoulement de fluide compressible est habituellement utilisé pour des gaz se déplaçant à haute vitesse (habituellement supersonique), contrairement au concept d'un écoulement incompressible, qui est utilisé pour des liquides et des gaz se déplaçant à des vitesses bien inférieures à la vitesse sonique. Un fluide compressible a des changements significatifs en termes de densité, un fluide incompressible n'en a pas.
- Le concept d'un gaz idéal est une simplification qui permet l'utilisation d'une relation directe entre la pression, la densité et la température, qui sont des propriétés qui sont particulièrement importantes dans l'analyse du écoulement au niveau de la tuyère.

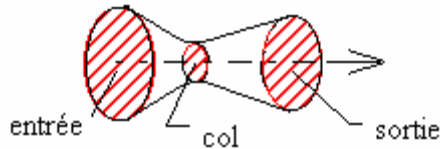
Les propriétés des fluides, tels la vitesse, la densité, la pression et la température, sont influencés, dans un fluide compressible, par :

1. les variations de la section efficace
2. la friction
3. les pertes de chaleur dues à l'environnement

Le but d'une tuyère de fusée est d'accélérer les produits de combustion à la vitesse la plus élevée possible. Ce but est atteint par un profil géométrique avec la condition qu'un écoulement isentropique est visé. Un écoulement isentropique est un écoulement qui est dépendant seulement de la section efficace – ce qui nécessite un écoulement adiabatique

et sans friction. Ainsi, dans la tuyère réelle, il est nécessaire de minimiser les effets de la friction, les dérangements du écoulement et les conditions qui peuvent mener a des pertes dues aux chocs. De plus, les pertes subies par les transferts de chaleur doivent être minimisées. De cette façon, les propriétés du écoulement sont près d'être isentropiques, et sont simplement affectées par les changements de la section effective lorsque le fluide traverse la tuyère.

Des endroits de sections effectives d'intérêt particulier sont montrés dans la figure ci-dessous.

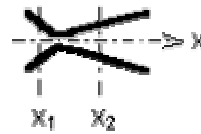


L'analyse d'un écoulement de fluide compressible comprend quatre équations d'intérêt particulier :

1. Énergie
2. Continuité
3. Quantité de mouvement
4. L'équation d'état

L'équation de l'énergie est un portrait du principe de la conservation de l'énergie. Pour un écoulement adiabatique entre deux points, x_1 et x_2 , elle est donnée par

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = C_p (T_1 - T_2)$$



où h représente l'enthalpie du fluide (qui peut être considérée comme l'énergie disponible pour le transfert d'énergie), v est la vitesse du écoulement sur l'axe x , C_p est la capacité thermique utile du fluide et T est la température du fluide.

Cette équation nous donne un bon aperçu du fonctionnement d'une tuyère de fusée. Les deux premiers termes montrent que la diminution en enthalpie est égale à l'augmentation en énergie cinétique. En d'autres mots, la chaleur du fluide est utilisée pour faire accélérer le écoulement à une plus grande vitesse. Le troisième terme représente le changement résultant (diminution) de la température du écoulement. La capacité thermique peut être considérée comme étant une constante et est une propriété déterminée par la composition des produits de combustion.

Il est apparent, alors, que les propriétés d'un fluide (comme la température) sont des fonctions de la vitesse du écoulement. En décrivant l'état d'un fluide à n'importe quel point du écoulement, il est utile de considérer l'état stagnant comme l'état de référence.

Les propriétés de la stagnation peuvent être considérées comme les propriétés qui résulteraient si le fluide était décéléré à une vitesse de zéro.

La température de stagnation, T_o , est trouvée par l'équation de l'énergie (en posant $v^2=0$) à être

$$T_o = T + \frac{v^2}{2C_p} \quad \text{équation 1}$$

Pour un écoulement isentropique, la relation suivante entre les propriétés de stagnation pour la température, la pression et la densité du fluide est très importante.

$$\frac{T_o}{T} = \left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^{k-1} \quad \text{équation 2}$$

où k est le rapport des chaleurs spécifiques, aussi appelée exposant isentropique, défini comme étant

$$k \equiv \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - R}$$

C_p et R (constante des gaz spécifiques) sont des propriétés déterminées par la composition des produits de combustion, où $R = R'/M$, où R' est la constante des gaz universelle et M est le poids moléculaire effectif des produits de combustion. Si les produits de combustion contiennent un pourcentage appréciable de particules en phase condensée (fumée), la valeur du poids moléculaire effectif, M , doit considérer ceci. Aussi, le k approprié doit être utilisé, qui considère le écoulement à deux phases.

La vitesse sonique locale, a , et le nombre de Mach, M , défini comme étant le rapport de la vitesse du écoulement et de la vitesse sonique locale, est donnée par

$$a = \sqrt{kRT} \quad M = \frac{v}{a} \quad \text{équation 3}$$

À partir des équations 1,2 et 3, la relation entre la température de stagnation (aussi appelée *température totale*) et le nombre de Mach peut être écrite comme suit

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad \text{équation 4}$$

Il peut être démontré à partir des première et deuxième lois de la thermodynamique que pour tout procédé isentropique,

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{constante} \quad \text{équation 5}$$

À partir des équations 4 et 5 et de l'équation d'état d'un gaz idéal, $P = \rho RT$, la relation entre la pression de stagnation, la densité et le nombre de Mach peut être exprimée comme suit dans les équations 6 et 7 :

$$\frac{P_o}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{équation 6}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{équation 7}$$

Les équations 4,6 et 7 sont particulièrement utiles, puisqu'ils permettent de déterminer chaque propriété dans un écoulement si le nombre de Mach et les propriétés de stagnation sont connues. Les propriétés de stagnation T_o , P_o et ρ_o sont simplement les propriétés présentes dans la chambre de combustion de la fusée, puisque la vitesse du écoulement est (considéré comme étant) zéro à ce point. En d'autres mots, T_o est la température de combustion du propulseur (TAF), P_o est la pression de la chambre et ρ_o est la densité des produits de combustion sous les conditions de la chambre.

Une autre propriété de stagnation importante est l'enthalpie de stagnation. Celle-ci est obtenue à partir de l'équation de l'énergie (en posant $v_2=0$).

$$h_o = h + \frac{v^2}{2} \quad \text{équation 8}$$

Physiquement, l'enthalpie de stagnation est l'enthalpie qui serait atteinte si le écoulement (à un certain point) était décéléré à une vitesse de zéro. Il est pratique de remarquer que l'enthalpie de stagnation reste constante au cours du passage du écoulement par la tuyère. Ceci est aussi vrai pour les autres propriétés de stagnation (température, pression et densité).

La deuxième des quatre équations d'intérêt particulier concernant le écoulement d'un fluide compressible est l'équation de continuité (ou de conservation de masse), qui est formulée ainsi :

$$\rho A v = \text{constante} = \rho^* A^* v^* \quad \text{équation 9}$$

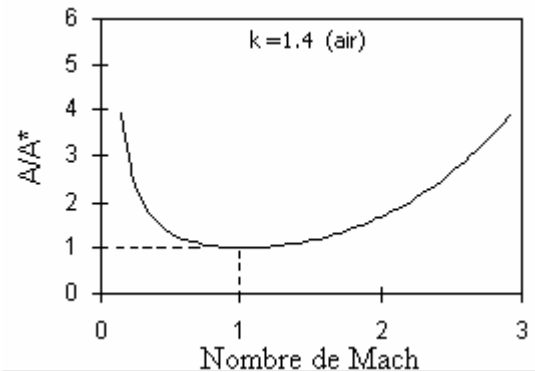
où A est l'aire en coupe de la tuyère, v est la vitesse du écoulement. Cette équation veut simplement dire que la masse qui passe la tuyère doit être constante. L'astérisque signifie une condition *critique*, où le nombre de Mach est unitaire, $M=1$ (la vitesse du écoulement

est égale à la vitesse sonique). L'importance de la condition critique sera bientôt apparente.

Avec les équations 3, 4, 7 et 9, il est possible d'exprimer le rapport d'aire, A/A^* , en termes du nombre de Mach du écoulement. Le rapport d'aire est simplement l'aire en coupe à n'importe quel point (x) dans la tuyère, à l'aire en coupe où la condition critique existe ($M=1$).

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \text{équation 10}$$

Lorsqu'une fonction est faite de A/A^* par rapport au nombre de Mach (fonction 1), utilisant cette équation, un résultat très intéressant est obtenu ! Il montre clairement qu'un passage *convergeant divergeant* avec une section d'*aire minimum* est requis pour accélérer le écoulement d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique. Le point critique où le écoulement est à vitesse sonique ($M=1$ à $A/A^*=1$) existe à la gorge de la tuyère. Ceci montre l'importance de la section divergente – sans elle, le écoulement ne pourrait jamais dépasser la vitesse sonique !



Fonction 1

Un écoulement supersonique est atteint à la partie divergente de la tuyère. Puisque le nombre de Mach peut être déterminé en connaissant le rapport d'aire, il est maintenant possible de faire les fonctions des variations de température, de pression et de densité du fluide à travers la tuyère, en utilisant les équations 4, 6 et 7. Une fonction de ces propriétés est donnée dans l'appendice C.

À partir des équations 8 et 9, la vitesse du écoulement à la sortie de la tuyère peut être exprimée ainsi :

$$v_e = \sqrt{2(h_x - h_e) + v_x^2} \quad \text{équation 11}$$

où e et x signifient sortie (exit) et n'importe quel point x sur l'axe de la tuyère, respectivement. Cette équation peut alors être mise dans une forme beaucoup plus utile à l'aide de l'équation de l'énergie et de la définition de k , ainsi que l'équation 2.

$$v_e = \sqrt{2 T_o \left(\frac{R'}{M} \right) \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad \text{équation 12}$$

Cette équation est une des plus utiles, puisqu'elle permet de calculer la vitesse de la sortie de la tuyère. En somme, il est nécessaire de savoir :

- k , rapport utile des chaleurs spécifiques des produits d'échappement, obtenu par l'analyse de la combustion. Pour la condition d'un écoulement à deux phases, la valeur doit être modifiée, comme expliqué dans la section *Écoulement à deux phases*.
- R' est la constante des gaz universelle ($R' = 8314 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{kmol}\cdot\text{K}$).
- M est le poids moléculaire utile des produits d'échappement, obtenu par l'analyse de combustion, et doit considérer la présence de toute espèce en phase condensée.
- T_o est la température de combustion du propulseur, aussi obtenu par l'analyse de combustion.
- P_e et P_o sont la pression de sortie de tuyère et la pression de chambre, respectivement. Pour la plupart des fusées amateurs, P_e peut être synonyme de pression atmosphérique ambiante : $P_e = P_a = 1 \text{ atmosphère}$. P_o peut être la pression de chambre mesurée, théorique ou calculée (voir la section Pression de la chambre).

Une meilleure compréhension des comportements de la tuyère peut être obtenue en étudiant cette équation. Il peut être vu que :

- La vitesse d'échappement maximale est obtenue dans un vide ($P_e=0$). C'est le *rapport de pression infini, P_o/P_e*
- Augmenter la pression de la chambre n'augmente pas énormément la vitesse d'échappement. Si $k=1,2$, alors doubler P_o de 35 atm. à 70 atm. augmente la vitesse d'échappement de seulement 7%.
- *Une grande température de combustion et un faible poids moléculaire utile* sont tous les deux énormément et également bénéfiques, étant proportionnel et inversement proportionnel à la puissance de la racine carrée, respectivement.
- Même si ce n'est pas évident, la modification de la valeur de k n'est pas très significative. Un changement de $k=1,1$ à $k=1,2$ résulte en une perte de vitesse d'environ 7%.

Le rapport entre l'aire de la gorge, A^* , et n'importe quel aire en aval dans la tuyère, A_x , auquel la pression P_x est maintenu peut être exprimé comme une fonction du rapport de pression, P_x/P_o , et k . En notant que $M=1$ à la gorge, et en utilisant les équations 2, 3, 4, 7 et 12, on obtient :

$$\frac{A^*}{A_x} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_x}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right) \left[1 - \left(\frac{P_x}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

équation 13

Cette dernière équation est également très importante et utile. Elle permet à l'aire de sortie, A_e , d'être calculée de manière à ce que la pression de sortie, P_e , est égale à la pression ambiante, P_a (typiquement 1 atm.), en substituant P_a pour P_x .

$$\frac{A^*}{A_e} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

équation 14

Cette équation est connue sous le nom de **condition de design de la tuyère**. Pour une telle condition la *poussée maximale* est atteinte (en dérivant). Pour ce design, le rapport d'aire A_e/A^* est connu comme étant le très important **rapport d'expansion optimal**.

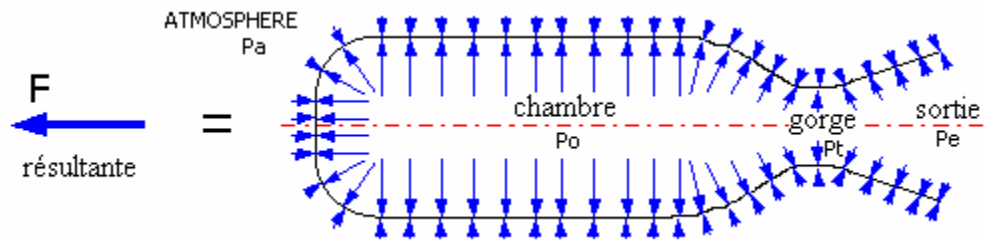
1.6 Poussée du moteur

La poussée que génère un moteur de fusée est l'élément fondamental de la performance. Sans aucun doute, ce paramètre est le plus important pour n'importe quel designer de moteurs de fusées amateurs. La poussée, étant la *force* qu'exerce un moteur, est ce qui propulse une fusée vers les étoiles.

La poussée est créée par l'expulsion de masse (échappement) traversant la tuyère à haute vitesse. L'expression pour la poussée est donnée par :

$$F = \int P \, dA = \dot{m} v_e + (P_e - P_a) A_e \quad \text{équation 1}$$

où le terme de gauche dans l'équation représente l'*intégrale des forces de pression* (résultante) agissant sur la chambre et la tuyère, proécoulementée sur une normale à l'axe de symétrie de la tuyère, comme le montre la figure.



La pression interne est à son maximum à l'intérieur de la chambre et diminue graduellement dans la tuyère à la sortie. La pression externe (atmosphérique) est uniforme sur les surfaces extérieures.

Dans le premier terme du côté droit de l'équation, m est le débit de masse des produits d'échappement et v_e est la vitesse d'échappement. Le deuxième terme du côté droit est la *pression de poussée*, qui est égale à zéro pour une tuyère avec un rapport d'expansion optimal ($P_e = P_a$) ; A_e est l'aire de la sortie de la tuyère.

En considérant la continuité (conservation de masse) à la gorge de la tuyère, l'équation 1 peut être réécrite comme

$$F = \rho^* A^* v^* v_e + (P_e - P_a) A_e \quad \text{équation 2}$$

Cette expression peut maintenant être modifiée en utilisant quelques équations qui ont été présentées dans la section Théorie de la tuyère, c'est-à-dire les expressions pour :

- Le rapport de la densité du fluide (à la gorge $M=1$), ρ_o / ρ (équation 7)
- Vitesse critique du écoulement (gorge), v^* (équation 3, notant que $v^*=a$)
- Vitesse de sortie de la tuyère, v_e (équation 12)

- L'équation d'état pour un gaz idéal, $P = \rho RT$

et le résultat est :

$$F = A^* P_o \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} + (P_e - P_a) A_e$$

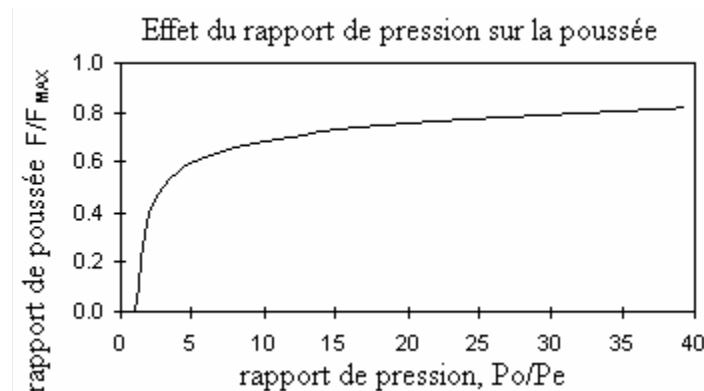
équation 3

Cette équation montre que, si le terme de pression de poussée est zéro, **la poussée est directement proportionnelle à l'aire de la gorge, A^* , et est quasiment directement proportionnel, P_o .**

Ceci est particulièrement intéressant. Ça veut dire que si la grandeur de la gorge est doublée, la poussée sera doublée (si la pression de la chambre est maintenue). Le même est vrai pour la pression de la chambre – si elle est doublée, la poussée sera approximativement doublée. En réalité, les choses ne sont pas si simples, puisque la grandeur de la gorge et la pression de la chambre sont reliées, comme il sera expliqué dans la section Pression de la chambre. Doubler la grandeur de la gorge impliquerait vraisemblablement des changements de design significatifs, comme une augmentation dans l'aire de combustion du grain. Semblablement, si la pression est pour être augmentée, le moteur devra être plus solide.

La poussée est aussi proportionnelle :

- À la pression de poussée (terme additif, peut être positif ou négatif)
- Au rapport des chaleurs spécifiques, k . La sensibilité à k est plutôt basse. Par exemple, la différence en poussée calculée pour $k=1,4$, comparée à $k=1,0$, est une réduction de 14% (pour un rapport de pression de $P_o/P_e=68$).
- Au rapport de pression au travers la tuyère, P_e/P_o , comme montré dans la charte :



Cette charte montre le rapport de poussée, F/F_{MAX} , en fonction du rapport de pression, où F_{max} est la poussée qui pourrait être obtenue avec un rapport d'expansion infini (l'expansion dans le vide, avec $P_e=0$). Dans la charte, la poussée indiquée, F , exclus le

terme de pression de poussée. La poussée totale produite est donnée par $F_{total} = F + (P_e - P_a) A_e$.

Le rapport de pression de la tuyère est déterminée par seul le rapport d'aire A^*/A_e , comme donné par l'équation 14 de la Théorie de la tuyère. Qu'est-ce que cette fonction nous dit?

- Si le rapport de pression (et donc le rapport d'expansion) est 1, alors $F=0$. La seule poussée par une telle tuyère est la poussée de pression, ou $F_{total} = (P_e - P_a)A_e$. Une telle tuyère, bien sûr, n'aurait pas de portion divergente, puisque $A^*/A_e=1$, et serait une très mauvaise tuyère!
- La pente de la courbe est très prononcée initialement, puis commence à s'aplatir au-delà de $P_0/P_e=5$. Ceci est significatif, puisque ça indique que même une tuyère avec une expansion minimale serait très bénéfique. Avec un rapport de pression tel 5, la poussée résultante est environ 60% du maximum théorique. De l'équation 14, il est trouvé que le rapport d'expansion d'aire requise est seulement $A_e/A^*=1,38$ (pour $k=1,2$), ce qui se traduit en besoin d'une tuyère avec un rapport de diamètre sortie-à-gorge de moins que 2!

Le degré auquel la poussée est amplifiée par la tuyère est quantifiée par le **coefficient de poussée**, C_f , et est définie en termes de la pression de la chambre et de l'aire de la gorge :

$$F = C_f A^* P_0 \quad \text{équation 4}$$

Le coefficient de poussée détermine l'amplification de poussée due à l'expansion dans la tuyère comparée à la poussée qui serait exercée si la pression de la chambre agissait seulement sur l'aire de la gorge seulement. L'équation 4 est utile, puisqu'elle permet d'obtenir la valeur expérimentale de C_f à partir de valeurs mesurées : la pression de la chambre, le diamètre de la gorge et la poussée. La valeur idéale de C_f est calculée à partir des équations 3 et 4, et est montrée si dessous en temps que l'équation 5 :

$$C_f = \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} + \frac{(P_e - P_a) A_e}{P_0 A^*} \quad \text{équation 5}$$

Un moteur KN/Saccharose équipé avec une bonne tuyère fournira un C_f d'environ 1,5 sous des conditions stables. Le C_f idéal pour un même moteur se situerait autour de 1,65. Une grande fraction des pertes est due aux inefficacités d'un écoulement à deux phases.

Comme note finale, il doit être mentionné que les équations pour la poussée et le C_f (équations 3 et 5) requièrent un k corrigé pour un écoulement à deux phases.

1.7 Impulsion

Impulsion

Même si la poussée est un facteur important pour caractériser la *capacité d'ascension* d'un moteur de fusée, elle ne donne aucune indication de la hauteur à laquelle la fusée sera propulsée. Pour cela, nous avons besoin d'une mesure du *rendement total* en termes de capacité de propulsion. L'élément essentiel pour cela est l'impulsion totale d'un moteur de fusée, ce qui incorpore l'élément essentiel du temps, ou durée de la poussée.

L'impulsion totale est définie comme étant l'intégrale de la poussée par rapport à la durée d'opération du moteur :

$$I_t = \int_0^{t_b} F dt \quad \text{équation 1}$$

et est représenté par l'aire sous la courbe poussée-temps :

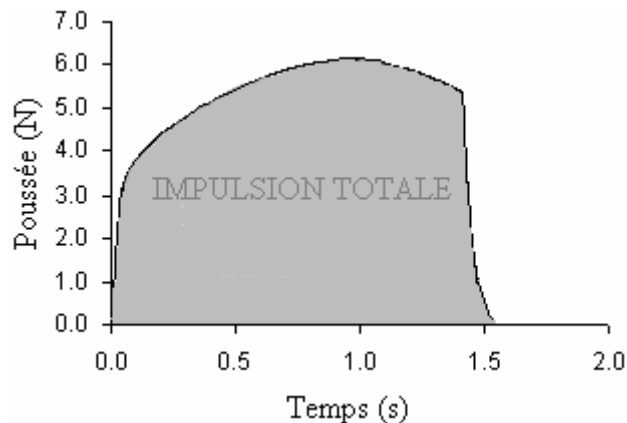


Figure 1 – Courbe poussée-temps pour un moteur typique

Les unités de l'impulsion sont celles de la force multipliées par ceux du temps, typiquement des livre-secondes (lb-s) ou des Newton-secondes (N-s).

Il est important de noter que l'impulsion totale ne raconte qu'une partie de l'histoire regardant la capacité d'un moteur à propulser une fusée vers les cieux. Par exemple, un moteur qui donne une impulsion totale de 200 lb-s peut produire une poussée moyenne 100 lb. Pour 2 secondes (100 lb. x 2 s = 200 lb-s), ou peut produire une poussée de 25 lb. pour 8 secondes (25 lb x 8 s = 200 lb-s), comme le montre la figure 2. Les deux donnent la même impulsion totale, qui est habituellement abrégée I_t .

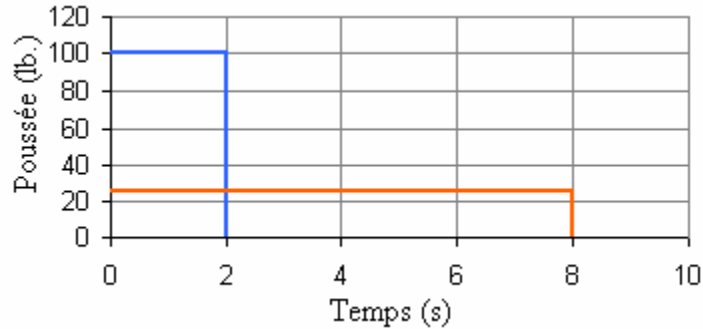


Figure 2 – Deux courbes poussée-temps ayant des impulsions totales identiques

L'altitude atteinte différera à un certain degré, avec un effet plus significatif lorsque le rapport poussée/masse chute. La différence la plus prononcée sera avec l'accélération de la fusée, puisque l'accélération initiale est donnée par :

$$a = F/m - g \quad \text{équation 2}$$

où F = poussée, m = masse initiale de la fusée et g = accélération gravitationnelle. Avec une plus petite accélération, il sera plus long pour une fusée d'atteindre la vitesse à laquelle les ailerons fournissent une bonne stabilité. Et dans un cas extrême, si la poussée est inférieure au poids de décollage, la fusée ne quittera même pas la base de lancement, peu importe la valeur de l'impulsion totale!

Vitesse caractéristique

La *vitesse caractéristique*, aussi appelée c^* ou c^* , est une figure de valeur thermodynamique pour un propulseur particulier et peut être considérée comme une bonne indication de l'*efficacité de combustion*. L'expression pour un c^* idéal est donnée dans l'équation 3, et est une fonction des produits de combustion (k, M, T_0).

$$c^* = \sqrt{\frac{R' M T_0}{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}} \quad \text{équation 3}$$

La valeur utilisée pour k devrait être celle d'une mixture de gaz et de phase condensée, comme montré dans la section Notes techniques du site web de Richard Nakka.

L'impulsion spécifique livrée est liée à c^* de la manière suivante :

$$I_{sp} = c^* C_f / g \quad \text{équation 4}$$

où c^* prend compte de l'influence de la combustion et C_f (coefficient de poussée) prend compte de l'influence de la tuyère. Comme tel, c^* peut être considéré analogue à l'impulsion spécifique avec un $C_f = 1$.

Le c^* livré peut être obtenu d'une courbe pression-temps d'un moteur, donné par l'intégrale temporelle de la pression de la chambre sur la durée, multipliée par le rapport de l'aire de la gorge à la masse du propulseur, comme montré :

$$c^* = \frac{A_t}{m_p} \int_0^{t_b} P(t) dt \quad \text{équation 5}$$

Pour des moteurs au KN-sucre, le c^* livré est sensé être en accord avec la valeur calculée, indiquant qu'il y a une haute efficacité de combustion.

Impulsion spécifique

L'**impulsion spécifique** qu'un propulseur est capable de produire (soit théorique ou réel) est l'indicateur par excellence de la performance potentielle. Dans sa forme de base, l'impulsion spécifique peut être considérée comme traduisant la *poussée produite* par *unité de masse* de propulseur sur une *période de combustion de une seconde*. Comme tel, les unités de l'impulsion spécifique seraient des lb-s/lb ou des N-s/kg. Dans la première série d'unités, les « lb » s'annulent, donnant les unités plus conventionnelles que sont les secondes. Pour la deuxième série d'unités, la division de l'impulsion spécifique en N-s/kg par l'accélération gravitationnelle, g ($9,806 \text{ m/s}^2$) résulte à des secondes aussi.

L'impulsion spécifique réelle produite par un moteur, par exemple dans un test statique, est obtenue par l'expression :

$$I_{sp} = I_t / w_p \quad \text{équation 6}$$

Où w_p est le poids du propulseur (lb ou kg x g). L'impulsion spécifique réelle dépend :

- du débit de masse, et donc sur les dimensions du moteur
- de l'énergie du carburant disponible
- de l'efficacité de la tuyère
- des conditions de pression ambiante
- des pertes caloriques du moteur
- des pertes du écoulement à deux phases
- de l'efficacité de combustion

Ces facteurs sont discutés dans la section Corrections pour moteurs réels.

L'**impulsion spécifique idéale** d'un propulseur de fusée est calculée en utilisant l'équation 12 de la section Théorie de la tuyère, qui exprime la vitesse d'échappement,

V_e , en termes des propriétés du écoulement et du rapport de pression. Puisque $V_e = c^* Cf$, l'Isp idéale peut être déterminée par l'équation 4 :

$$I_{sp} = \frac{1}{g} \sqrt{2 T_o \left(\frac{R'}{M} \right) \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

équation 7

où k , M , T_o , P_e et P_o sont tous définis dans la section Théorie de la tuyère. Cette équation est utilisée pour calculer l'impulsion spécifique idéale pour les propulseurs au KN/sucre, comme montré dans les pages Notes techniques du site web de Richard Nakka.

1.8 Pression de la chambre

La pression de la chambre qu'un moteur développe est d'une importance cruciale quant à l'opération réussie d'un moteur de fusée. Non seulement la pression de la chambre influence fortement le taux de combustion d'un propulseur, l'efficacité thermodynamique et la poussée, elle charge le moteur et ses joints à l'extrême. Comprendre la nature de la génération de la pression de la chambre, et la prédiction de celle-ci, est un des éléments clés pour un design de moteur réussi.

Qu'est-ce qui cause le développement de pression à l'intérieur de la chambre d'un moteur de fusée? Qu'est-ce qui détermine la magnitude de cette pression? Intuitivement, l'accumulation de pression est le résultat de la combustion du grain de propulseur, et les gaz produit se hâtent de s'échapper par la tuyère. Si la gorge est suffisamment petite, les gaz ne peuvent s'échapper assez rapidement et l'accumulation des gaz dans la chambre résulte en la pressurisation de celle-ci.

En réalité, cette explication intuitive est essentiellement correcte. Par contre, un facteur important qui détermine la magnitude de la pression de la chambre n'est pas du tout intuitif – le concept de l'*écoulement étouffé*. Ce concept fourni un moyen convenable de calculer la pression de la chambre, et est valide pour le modes passager et en équilibre du moteur, comme discuté plus bas.

En regardant à la courbe de la pression de la chambre en fonction du temps (Figure 1), nous voyons qu'il existe trois phases distincts et importants dans l'opération du moteur :

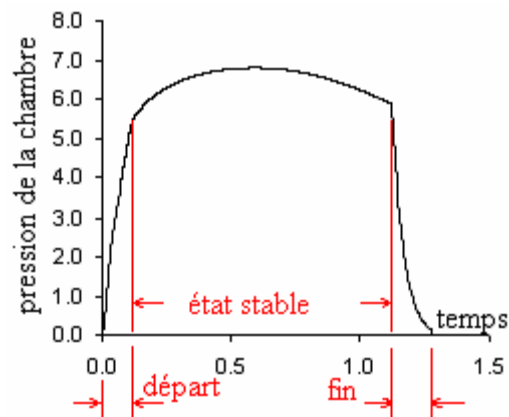


Figure 1 – Pression de la chambre du moteur

La courbe de la pression d'un moteur de fusée illustre les comportements des états passager et stable. Les phases passagères surviennent lorsque la pression varie rapidement selon le temps – au cours de l'ignition et de la phase de départ, et suivant la combustion complète (ou quasi-complète) du grain, lorsque la pression chute dramatiquement lors de la phase finale. La variation de la pression de la chambre durant l'état stable est due en grande partie à la variation de la géométrie du grain (surface de

combustion). D'autres facteurs peuvent jouer un rôle, comme l'érosion de la gorge de la tuyère et l'augmentation du taux de combustion érosif.

Premièrement, le départ et la période stable seront considérés. La phase de départ est hypothétiquement très brève, même si l'ignition complète du grain n'est pas instantanée en réalité. La durée actuelle de la phase de départ est fortement dépendante de l'efficacité du système d'ignition employé.

La phase stable domine clairement la performance d'un moteur et constitue conséquemment la **condition de design**.

En déterminant la croissance de pression au départ, ainsi que le niveau de pression à l'état stable, il est premièrement noté que le taux de *génération de produits de combustion* est égal au taux de *consommation du grain de propulseur*, donné par :

$$\dot{m}_g = A_b \rho_p r \quad \text{équation 1}$$

où ρ_p est la densité du propulseur, A_b est la surface de combustion du grain, et r est le taux de combustion du propulseur (taux de régression de la surface).

Il est important de noter que les produits de combustion peuvent être constitués de matière en phase gazeuse et en phase condensée. La phase condensée, qui se manifeste en fumée, peut être soit des particules solides ou liquides. Seuls les produits gazeux peuvent contribuer au développement de la pression. La phase condensée contribue certainement, par contre, à la poussée (performance globale) du moteur de fusée, due à sa masse et à sa vitesse, comme le montre l'équation 1 de la section Théorie de la poussée.

Le taux auquel les produits de combustion s'accumulent dans la chambre est donné par :

$$\frac{dM_c}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho_o v_o) = \rho_o \frac{dv_o}{dt} + v_o \frac{d\rho_o}{dt} \quad \text{équation 2}$$

où ρ_o est la densité des gaz instantanée dans la chambre, et v_o est le volume des gaz instantané (qui est égal au volume libre dans la chambre).

Le changement en volume de gaz par rapport au temps est égal au changement en volume dû à la consommation du propulseur, donné par $dv_o/dt = A_b r$. Ceci mène à :

$$\frac{dM_c}{dt} = \rho_o A_b r + v_o \frac{d\rho_o}{dt} \quad \text{équation 3}$$

Le taux auquel les produits de combustion s'écoulent par la tuyère est limité par la condition de l'*écoulement étouffé*. Comme décrit dans la section Théorie de la tuyère, l'écoulement atteint la vitesse sonique (Mach 1) à la portion la plus étroite de la tuyère

convergente divergente (gorge). La vitesse de l'écoulement, à ce point, ne peut jamais dépasser la vitesse du son, et est dans une condition appelée *étouffée*. Ceci nous permet de déterminer le taux auquel les produits de combustions s'écoulent par la tuyère est donnée par l'équation 4 : (pour la dérivation, voir l'Appendice 4)

$$\dot{m}_n = P_o A^* \sqrt{\frac{k}{R T_o}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \text{équation 4}$$

Le taux d'écoulement de masse par la tuyère est une fonction de la pression de la chambre (qui détermine la densité de l'écoulement), de l'aire de la gorge et des propriétés des gaz (qui établissent la vitesse sonique).

Le principe de conservation de la masse requiert une balance entre le *taux de génération de masse* et la somme des taux d'*accumulation de masse* dans la chambre et d'écoulement *par la tuyère* :

$$\dot{m}_g = \frac{dM_c}{dt} + \dot{m}_n \quad \text{équation 5}$$

La substitution des équations 1 et 3 dans l'équation 5 donne :

$$A_b \rho_p r = \rho_o A_b r + u_o \frac{d\rho_o}{dt} + \dot{m}_n \quad \text{équation 6}$$

Le taux de combustion du propulseur peut être exprimé en termes de pression de chambre par la loi de Saint Robert :

$$r = a P_o^n \quad \text{équation 7}$$

où a et n sont le coefficient du taux de combustion et l'exposant de pression, respectivement. La substitution des équations 7 et 4 (écoulement de masse à travers la tuyère) dans l'équation 6 mène à l'équation suivante :

$$A_b \rho_p a P_o^n = A_b \rho_o a P_o^n + u_o \frac{d\rho_o}{dt} + P_o A^* \sqrt{\frac{k}{R T_o}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\text{équation 8}$$

À partir de la *loi des gaz idéaux*, la densité dérivée dans l'équation ci haut peut être exprimée comme :

$$\frac{d\rho_o}{dt} = \frac{1}{R T_o} \frac{dP_o}{dt} \quad \text{équation 9}$$

Aussi, considérant que la température de chambre, T_o , est essentiellement indépendante de la pression de chambre, l'équation 8 peut être réécrite comme :

$$\frac{u_o}{R T_o} \frac{dP_o}{dt} = A_b a P_o^n (\rho_p - \rho_o) - P_o A^* \sqrt{\frac{k}{R T_o}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \text{équation 10}$$

Cette équation est particulièrement utile, car elle permet de déterminer le taux de changement de la pression de la chambre (dP_o/dt) durant la phase de départ de l'opération du moteur, où la pression de la chambre monte rapidement au niveau d'opération stable. Une fois que la phase stable est atteinte, quand l'écoulement de gaz de combustion est en équilibre avec la production de gaz de la combustion du propulseur, $dP_o/dt = 0$, et le côté gauche de l'équation 10 disparaît. La pression de chambre à l'état stable peut alors être exprimée comme :

$$P_o = \left[\frac{A_b}{A^*} \frac{a \rho_p}{\sqrt{\frac{k}{R T_o}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \right]^{\frac{1}{(1-n)}} \quad \text{équation 11}$$

Notez que le terme de la densité des produits de combustion a été enlevé, puisqu'il est petit comparativement à la densité du propulseur.

L'équation 11 peut être grandement simplifiée par l'utilisation de l'équation 7, laissant $Kn = A_b / A^*$ et en notant que la vitesse d'échappement caractéristique (c étoilé) est donnée par :

$$c^* = \sqrt{\frac{R T_o}{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}}$$

Ceci mène à l'équation simplifiée pour la pression de chambre à l'état stable :

$$P_o = Kn \rho_p r c^* \quad \text{équation 12}$$

où r est le taux de combustion à la pression de chambre, P_o .

La troisième phase de la courbe de pression, la phase finale, survient idéalement immédiatement après que le grain de propulseur soit complètement brûlé. Ceci résulte en une baisse de pression qui est plus graduelle que dans un cas idéal. Par contre, il n'est pas pratique de supposer cet effet, et la pression lors de cette phase est déterminée sous la supposition que le grain a été consommé entièrement.

Après l'arrêt de la combustion, lorsque $A_b = 0$, l'équation 10 devient :

$$\frac{u_o}{R T_o} \frac{dP_o}{dt} = - \frac{P_o A^*}{c^*} \quad \text{équation 13}$$

Cette équation différentielle peut être solutionnée pour exprimer la pression de chambre durant la phase finale comme une fonction du temps de saignement de l'écoulement étouffé :

$$P_t = P_{bo} \exp\left(\frac{R T_o A^*}{u_o c^*} t\right) \quad \text{équation 14}$$

où P_{bo} est la pression de la chambre à l'arrêt de la combustion et t est le temps à partir de ce moment. La pression est visiblement en chute exponentielle.

En plus de la conséquence de la combustion de résidus durant cette phase, la *scorification de la tuyère* aura tendance à rendre la chute de pression plus graduelle que prédite par l'équation 14. La scorification de la tuyère est la tendance de la matière en phase condensée (en particulier la matière liquide) à accumuler autour de la gorge, réduisant effectivement le diamètre. La scorification est plus significative durant la phase finale à cause de la chute de niveau de pression et de la plus basse vitesse d'échappement.

1.9 Écoulement à deux phases

La plupart des propulseurs de fusées solides produisent des gaz d'échappement qui sont un mélange de gaz et de particules en phase condensée (solide ou liquide) qui sont visibles comme étant la fumée du jet d'échappement. Les propulseurs contenant des métaux, comme l'aluminium ou le magnésium, génèrent des oxydes des métaux comme produits de combustion en phase condensée. Les oxydes métallo-composés, comme le nitrate de potassium (KN) ou le perchlorate de potassium (KP), génèrent des produits en phase condensée de masse moléculaire particulièrement élevée, qui n'est pas du tout désirable. Les propulseurs de type KN-Sucre produisent un nuage blanc dense de fumée de carbonate de potassium. En fait, 44% de la masse d'échappement est de la matière solide!

La présence de solides ou de liquides dans l'échappement mène à une réduction de performance pour un bon nombre de raisons :

- Cette portion de la masse de combustion ne peut pas faire aucun travail d'expansion et ne contribue donc pas à l'accélération de l'écoulement d'échappement.
- La plus haute masse molaire effective de ces produits baisse la vitesse caractéristique (c^*).
- Due à l'inertie thermique, la chaleur de la phase condensée est en partie éjectée de la tuyère avant de transmettre sa chaleur aux gaz environnants, et n'est donc pas convertie en énergie cinétique. On appelle ce phénomène le **retard thermique des particules**.
- Similairement, due à la masse relativement élevée des particules (comparativement aux gaz), ils ne peuvent pas accélérer aussi rapidement que les gaz environnants, surtout dans la portion de la tuyère où l'accélération de l'écoulement est extrêmement élevée (région de la gorge). L'accélération des particules dépend du frottement frictionnel dans l'écoulement, qui nécessite une vitesse différentielle. Le résultat net est que les particules en phase condensée quittent la tuyère à une vitesse inférieure que celle des gaz. Ceci est appelé le **retard de vitesse des particules**.

En termes des paramètres de performance de fusée, la présence de produits à phase condensée est reflétée en une vitesse caractéristique réduite, dû au poids moléculaire effectif plus élevé de la mixture gaz/particules.

Le coefficient de poussée idéal, C_f , d'un autre côté, est amélioré avec une augmentation de la fraction de particules, une conséquence d'une valeur de k réduite. Par contre, le C_f livré souffre considérablement, dû au retard thermique et au retard de vitesse. Ceci est probablement la plus grande perte d'efficacité que subi un moteur avec une fraction considérable de particules dans l'échappement. Ceci est particulièrement vrai pour une tuyère sous-expansionnée (où la partie divergente serait trop courte). L'importance apparente d'avoir une bonne portion divergente de tuyère est claire en examinant la Figure 3, qui montre la variation du coefficient de poussée idéal pour un écoulement à

travers la tuyère Kappa de Richard Nakka. La tuyère a un rapport d'expansion quasi-idéal de $A_e/A_t = 11,4$, ce qui donne un coefficient de poussée idéal de 1,69. Par contre, si la tuyère avait été coupée à la gorge (la ligne rouge pointillée), le coefficient serait de seulement 0,62. La divergence augmente donc la poussée idéale par un facteur de 2,73! Bien sûr, les valeurs « livrées » sont probablement inférieures aux valeurs idéales. Le coefficient de poussée livré de ce moteur est d'environ 1,5. On ne sait pas quel est le coefficient de poussée livré pour une tuyère coupée, puisque cette configuration n'a pas été testée.

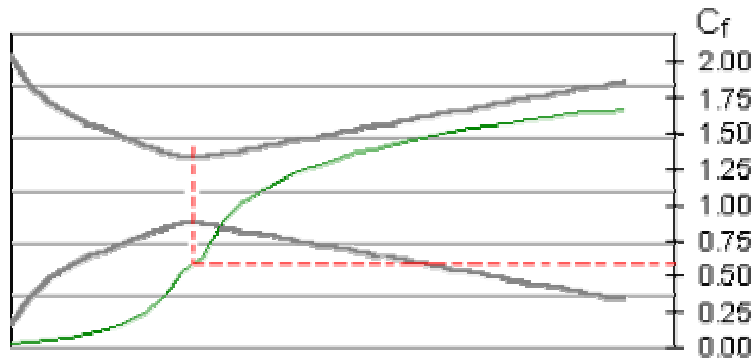


Figure 3 – C_f idéal pour un écoulement à deux phases à travers une tuyère Kappa

Un autre facteur qui est important en raison de l'écoulement à deux phases est le *contour de la tuyère*, surtout dans la région de la gorge. La Figure 4 illustre l'accélération de l'écoulement pour la tuyère Kappa. L'accélération dans la région de la gorge (la ligne rouge pointillée) est extrêmement élevée, surtout tout juste en aval, où elle est à son maximum. La plupart du retard des particules, qui est une fonction de l'accélération, survient dans cette région, donnant ainsi une importance particulière d'avoir une tuyère avec un contour bien arrondi autour de la gorge, sans aucun changement brusque de l'aire en coupe.

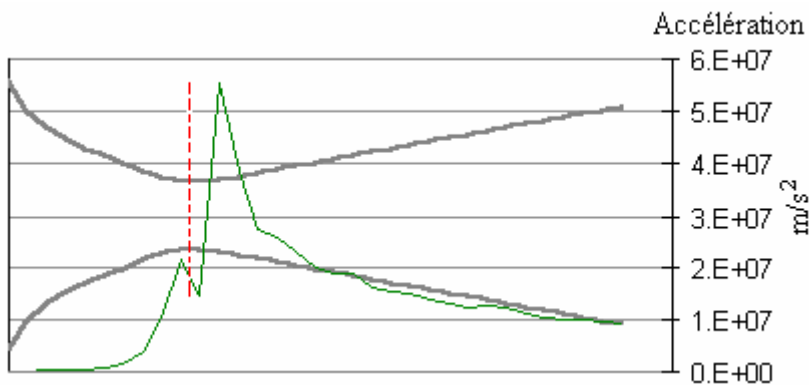


Figure 4 – Accélération Gaz/particules pour un écoulement à deux phases dans la tuyère Kappa

Les dimensions du moteur de fusée ainsi que les dimensions des particules en phase condensée jouent tous les deux un rôle important quant aux effets de l'écoulement à deux phases. Ceci est illustré dans la Figure 5, qui est la fonction de la perte de vitesse caractéristique due aux :

- Dimensions du moteur
- Dimensions des particules

Il est à noter que la fraction massique des particules dans l'échappement pour cette étude était $X = 0,25$. Pour les propulseurs KN-Sucre standards, $X = 0,44$.

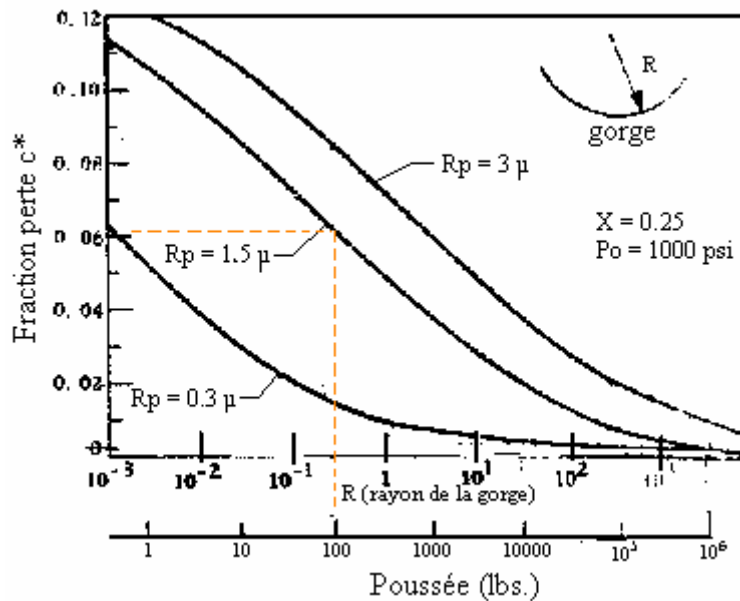


Figure 5 – Influence des dimensions du moteur et de la dimension des particules sur c^*
Réf. Dynamics of Two-Phase Flow in Rocket Nozzles, ARS Journal, Dec. 1962

Par exemple, pour un moteur d'une poussée de 100 lbs. , le moteur souffre d'une perte de 6% en vitesse caractéristique si la dimensions moyenne des particules est de 1,5 micron, comme l'indique la ligne rouge pointillée.

Il est clair par cette fonction que pour les moteurs amateurs expérimentaux, qui ont généralement une poussée de 1000 lbs. ou moins, que les pertes de l'écoulement à deux phases sont significatives, mais peuvent probablement être négligées dans de gros moteurs « professionnels ».

Comment considérer la présence d'un jet à deux phases dans les calculs de performance d'un moteur, comme ceux présentés dans les pages théoriques précédentes? Il est impossible d'ignorer la matière solide dans l'échappement, puisqu'elle représente 44% de celle-ci! Une supposition clé requiert que l'écoulement des particules se fasse à la même vitesse que l'écoulement des gaz (pas de retard de vitesse des particules), alors les équations modifiées représentent la limite de performance. Les détails sont

excessivement compliqués et ne seront pas présentés ici, mais, heureusement, le résultat final est plutôt simple. Il se trouve que la mixture de gaz et de particules se comporte comme un gaz avec un exposant isentropique modifié, k . Toutes les équations fondamentales restent les mêmes et sont entièrement applicables à l'écoulement à deux phases, avec les seules modifications étant :

1. La **masse moléculaire**, M , doit tenir compte de la présence de la phase condensée en calculant la *masse molaire effective*, qui est obtenue en divisant la masse du système par le nombre de moles de gaz dans le système. Par exemple, si la masse du système est de 100 grammes et que le nombre de moles de gaz est 2,3819, alors :

$$M = 100 / 2,3819 = 41,98 \text{ g/mol}$$

2. L'**exposant isentropique** modifié prend deux formes, une pour les conditions où la vitesse de l'écoulement (ou plutôt l'accélération) est basse, et l'autre pour les conditions d'écoulement avec une forte accélération. Où l'accélération de l'écoulement est basse, comme dans la chambre de combustion,

$$k = C_{p_{\text{mix}}} / (C_{p_{\text{mix}}} - R')$$

équation 1

où $C_{p_{\text{mix}}}$ est la *chaleur spécifique effective de la mixture de gaz et de solides* et R' est la constante des gaz universelle. La méthode pour calculer $C_{p_{\text{mix}}}$ est fournie dans la section Notes techniques. Cette forme de k doit être utilisée lors du calcul de la **pression de chambre** et de la **vitesse caractéristique**.

Où la vitesse de l'écoulement et l'accélération sont élevées, comme dans la tuyère :

$$k = k' ((1 + \psi (C_s/C_{p_{\text{gaz}}})) / (1 + k' \psi (C_s/C_{p_{\text{gaz}}})))$$

équation 2

où k' est l'exposant isentropique pour la mixture de gaz seulement, $\psi = X / (1-X)$, où X la fraction massique de particules dans l'échappement. C_s est la chaleur spécifique pour la mixture solide (ou liquide) dans l'échappement et $C_{p_{\text{gaz}}}$ est la chaleur spécifique pour la mixture de gaz.

La dérivation de cette forme d'exposant isentropique suppose une condition d'écoulement constante où aucun retard de vitesse ou thermique est supposé exister, et est basée sur les équations de quantité de mouvement et d'énergie pour un écoulement isentropique constant. Des détails additionnels sur le calcul de cet exposant isentropique peuvent être trouvés dans les Notes techniques. Cette forme de k doit être utilisée en calculant la **vitesse d'échappement**, la **poussée**, le **coefficient de poussée** et les autres paramètres d'écoulement par la tuyère.

1.10 Corrections pour moteurs de fusée véritables

Les pages précédentes traitants de la théorie du moteur de fusée solide considèrent l'analyse d'une fusée idéale, qui, bien sûr, n'existe pas. La fusée idéale représente la performance maximale qui serait atteinte si ce n'était pas pour les incertitudes et autres approximations qui mènent à des réductions de performance dans des moteurs de fusée véritables. On tient compte de ceux-ci en utilisant divers facteurs de correction dans le design ou l'analyse d'un moteur de fusée.

Conditions de chambre

L'efficacité de combustion et les pertes de chaleur à travers le mur de la chambre ont tous les deux tendance à produire une pression de chambre inférieure à celle qui est trouvée théoriquement. Les propulseurs solides, par contre, ont typiquement une haute efficacité de combustion si les constituants ont été bien mélangés et que les particules de l'oxydant sont très petits. Une mesure de l'efficacité de combustion d'un propulseur peut être prise en comparant la valeur mesurée (livrée) de la vitesse caractéristique (c étoilé) à la valeur idéale :

$$\eta^* = \frac{\bar{c}^*}{c^*}$$

La valeur livrée de c étoilé peut être obtenue grâce aux mesures de pression d'un test statique :

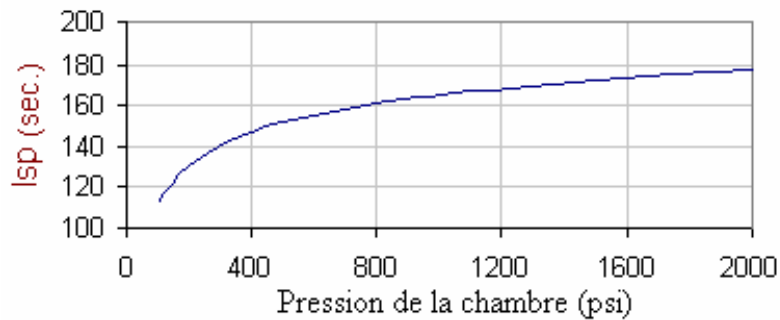
$$\bar{c}^* = \frac{A_t}{m_p} \int_0^{t_h} P(t) dt$$

ou mesuré par la combustion en «vaisseau fermé» d'échantillons de propulseur. Pour des propulseurs à base de sucre bien préparés, l'efficacité de combustion a été mesurée à être entre 98 et 99%. À un certain degré, l'efficacité de combustion est une fonction des dimensions du moteur. Les moteurs ayant de plus longues chambres offrent plus de temps aux réactions chimiques de survenir avant l'éjection de l'échappement par la tuyère.

Les pertes de chaleur à travers le mur de la chambre sont aussi dépendantes des dimensions du moteur, ainsi que du matériel du mur et de son épaisseur. Par exemple, un moteur plus gros avec un mur de fer mince peut avoir beaucoup moins de perte de chaleur qu'un petit moteur avec un mur d'aluminium relativement épais. Par contre, l'effet négatif global est probablement insignifiant pour les deux cas.

La pression de la chambre a un effet prononcé sur l'impulsion spécifique d'un propulseur, particulièrement à un régime de pression plus bas, comme le montre la figure ci-dessous :

Variation de l'impulsion spécifique selon la pression de la chambre



Comme les moteurs de fusée amateurs ont typiquement de très courtes durées de combustion, une portion significative de l'impulsion spécifique peut résulter des phases initiales et finales de la combustion, lorsque la pression de la chambre est beaucoup plus basse que le niveau d'opération stable. Comme résultat, l'impulsion spécifique livrée souffre. Ceci est une raison qui explique pourquoi l'impulsion spécifique peut être plus basse qu'idéalement, qui est basée sur une pression d'un état constant (habituellement la référence est de 1000 psi). La quantité de pertes, symbolisée ζ_p , est hautement dépendante de la durée de la combustion et du profil de la pression par rapport au temps, et peut être 5% ou plus. Ainsi, un facteur de correction de pression typique serait $\zeta_p = 0,95$.

Corrections pour la tuyère

L'écoulement à travers une tuyère véritable diffère de celle d'une tuyère idéale à cause des effets frictionnels, du transfert de chaleur (particulièrement à la gorge), des gaz imparfaits et de la combustion incomplète, de l'écoulement non axial, de la non uniformité du fluide, du retard de vitesse et du retard thermique. Des tuyères coniques sont utilisées quasiment exclusivement pour des moteurs amateurs, dû à la simplicité relative de la construction d'une telle tuyère. Dans la théorie de la tuyère, l'écoulement est considéré unidimensionnel (axial). Dans une tuyère conique, l'écoulement est bidimensionnel, avec la sévérité de la vitesse non axiale dépendante de la divergence du demi angle du cône, α . Le facteur de correction pour un écoulement non axial est donné par :

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha)$$

Cette perte est habituellement très petite, avec des valeurs typiques étant $\lambda = 0,99$ pour un demi angle de 12 degrés et $\lambda = 0,97$ pour un demi angle de 20 degrés.

Le facteur de correction de la discharge est utilisé pour exprimer la qualité de la tuyère quant au taux d'écoulement de masse par la gorge par rapport au taux théorique, et est trouvé par le rapport du taux d'écoulement de masse livré et du taux d'écoulement de masse idéal :

$$\zeta_d = \frac{\bar{m}^*}{\dot{m}^*}$$

Le paramètre de design le plus significatif qui détermine le facteur de discharge est le contour dans la région d'entrée de la gorge. Un contour bien arrondi tend à maximiser le taux d'écoulement réel. Pour des propulseurs qui ont une fraction significative de particules dans l'échappement, un bon contour minimise l'accélération de l'écoulement à l'entrée, minimisant ainsi les pertes en écoulement à deux phases associées au retard de vitesse des particules.

Certains facteurs ont tendance à augmenter le taux d'écoulement de masse réel en comparaison au taux d'écoulement idéal. Ces facteurs incluent :

- Le transfert de chaleur du fluide dans le mur de la tuyère, qui a tendance à diminuer la température de l'écoulement, augmentant la densité.
- Le rapport de chaleur spécifique et d'autres propriétés changent dans la tuyère d'une façon d'augmenter le facteur de discharge.

Conséquemment, pour le moteur de fusée qui ne contient pas de produits en phase condensée dans l'échappement, la correction de discharge peut être près de l'unité. Par contre, pour un moteur de fusée qui utilise un propulseur avec une grande fraction de produits en phase condensée (comme le KN-Sucre), les pertes peuvent être significatives, même avec une entrée de tuyère bien arrondie. La valeur du facteur de correction de discharge serait typiquement $\zeta_d = 0,90$ pour ce propulseur avec une tuyère bien dessinée avec des surfaces d'écoulement lisses et une perte de chaleur minimale.

Corrections pour l'impulsion spécifique

L'impulsion spécifique idéal doit être corrigé pour obtenir l'impulsion spécifique livré d'un moteur de fusée véritable, en appliquant les facteurs de correction discutés plus haut :

$$\bar{I}_{sp} = \eta^* \zeta_p \zeta_d \lambda I_{sp}$$

Par exemple, le moteur Kappa-Dx de Richard Nakka, fonctionnant au propulseur KN/Dextrose, a les facteurs de correction suivants :

- | | |
|---|---------------------------|
| • Facteur de correction de l'efficacité de combustion | $\eta^* = 0,98$ |
| • Facteur de correction de la pression de la chambre | $\zeta_p = 0,95$ (estimé) |
| • Facteur de correction de la discharge de la tuyère | $\zeta_d = 0,91$ (estimé) |
| • Facteur de correction de la divergence de la tuyère | $\lambda = 0,99$ |

Comme l'impulsion spécifique idéal est $I_{sp} = 164$ sec (à 1000 psi), l'impulsion spécifique livré est donné par :

$$I_{sp} = (0,98) (0,95) (0,91) (0,99) 164 = 168 \text{ sec.}$$

1.11 GUIPEP

Introduction

Cette section a pour intention de servir d'introduction au programme GUIPEP, qui est simplement le programme PROPEP (version PC du Propellant Evaluation Program) avec une Graphical User Interface (GUI) ajoutée afin de grandement simplifier l'usage du programme. Ce programme thermochimique fort utile permet à l'utilisateur d'évaluer la performance théorique d'un propulseur de fusée solide (ou liquide). Comme tel, il est particulièrement pratique pour évaluer la faisibilité de formulations possibles de propulseurs. De plus, il permet à l'utilisateur de déterminer rapidement les rapports d'ingrédients les plus effectifs pour obtenir la performance désirée, à partir d'une perspective théorique.

GUIPEP permet premièrement de résoudre l'équilibre chimique, c'est-à-dire qu'il balance les équations chimiques qui relient les réactifs et les produits du propulseur par une méthode connue comme «minimisation de l'énergie libre Gibbs». Les ingrédients (réactifs) qui définissent le propulseur sont transformés adiabatiquement et irréversiblement à des produits de réaction dans les quantités fixées par les relations d'équilibre, pression de chambre et balance de masse à une température de réaction fixée par l'énergie de réaction disponible. La série de produits résultant procure la base du calcul des propriétés thermodynamique desquelles les paramètres de performance sont déterminés par un processus d'itération pour considérer les changements de propriétés et de composition des produits.

Les valeurs à entrer sont simplement une liste des ingrédients du propulseur (et la masse de chaque), ainsi que la pression de la chambre et la pression de sortie du col. Les valeurs obtenues sont la température de combustion, l'exposant isentropique, la masse moléculaire des produits, température d'échappement et composition, impulsion spécifique et rapport d'expansion idéal. Noter que les paramètres de taux de combustion ne sont pas calculés, puisque le taux de combustion est un phénomène complexe qui implique plusieurs procédés physiques autres que la combustion, comme la chaleur et le transfert de masse entre la flamme de réaction et la surface de combustion du propulseur.

Un autre programme thermochimique semblable est CET (Chemical Equilibrium with Transport Properties, NASA TM4557), mais il ne semble pas exister aucun GUI pour ce programme. Comme tel, c'est difficile à utiliser. Les prédictions sont pratiquement identiques à celles de GUIPEP.

Suppositions d'analyse

Les suppositions de base employées par le programme sont très similaires à celles décrites dans la section Suppositions de base :

- Écoulement unidimensionnel considéré dans les équations de continuité, d'énergie et de momentum
- Vitesse d'écoulement de zéro à l'entrée de la tuyère
- Combustion complète et adiabatique
- Expansion isentropique dans la tuyère
- Mélange homogène des réactifs et des produits
- La loi des gaz parfaits s'applique
- Aucun retard de température et de vitesse des produits en phase condensée

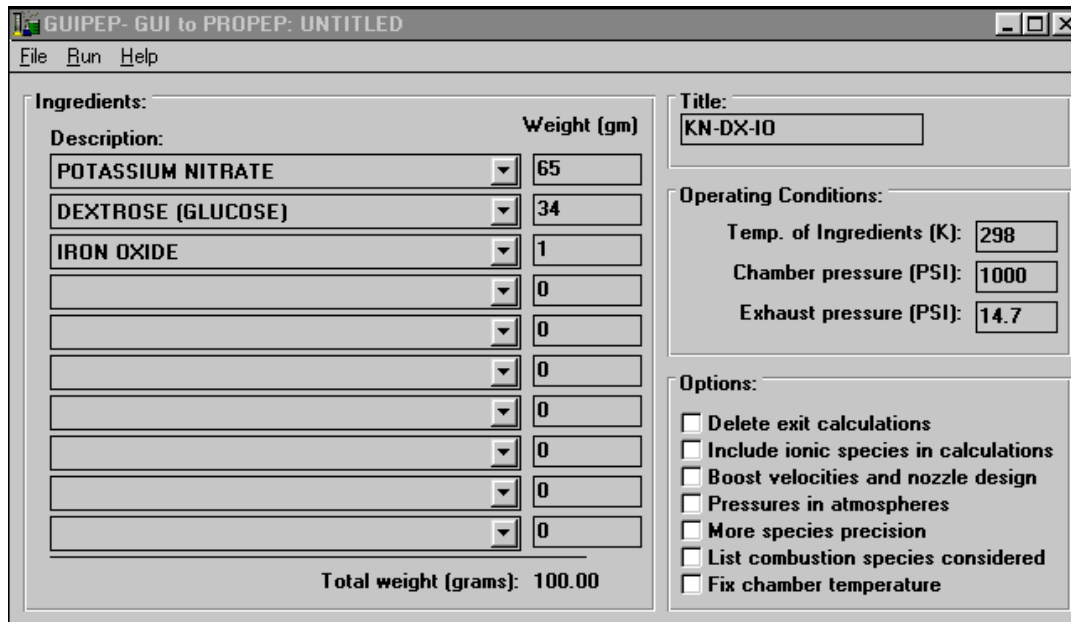
Utiliser GUIPEP

GUIPEP est très facile à utiliser. Jusqu'à 10 ingrédients de propulseur sont choisis à partir des boîtes, et la masse (en grammes) est entrée. La masse totale n'a pas besoin d'être de 100 grammes, mais cette façon est la plus convenable d'entrer les informations, puisque la masse représente alors le pourcentage de chaque constituant. Pour éliminer un ingrédient non désiré, zéro est entrée comme masse. Un titre de la composition est alors entré, et peut être jusqu'à 10 caractères de long. Les conditions d'opération sont habituellement laissées à leur valeur suggérée, sauf si il y a une raison particulière de les modifier :

- Température de la pièce = 298 K (qui est la température de la pièce, 25C.)
- Pression de la chambre = 1000 psi (qui est la pression référence à laquelle Isp est prise)
- Pression d'échappement = 14.7 psi (qui est une atmosphère, la condition d'expansion idéale au niveau de la mer)

Pour l'évaluation de base d'un propulseur, aucune option n'a besoin d'être choisie. Par contre, si le design de la tuyère est étudié, cochez les boîtes Boost Velocities et Nozzle Design.

La dernière étape est de laisser le programme faire le calcul, en sélectionnant Run, puis Single Run. Une boîte DOS apparaît alors pour permettre l'exécution du programme, qui est initiée en appuyant sur la touche Enter. MS Notepad apparaît alors, dans lequel les résultats sont affichés. Un cliché d'un exemple de tableau de données GUIPEP est montré si dessous :



Résultats de GUIPEP

La partie initiale des résultats est pratiquement un écho des données, comme montré ci-dessous :

```

File Edit Search Help
■■ KN-DX-10          Run using June 1988 Version of PEP,
Case 1 of 1        11 Aug 2001 at 9:14:10.68 pm

CODE              WEIGHT    D-H    DENS      COMPOSITION
 821 POTASSIUM NITRATE      65.000  -1169  0.07670   1N  30  1K
1093 DEXTROSE (GLUCOSE)    34.000  -1689  0.05670   6C 12H  6O
 541 IRON OXIDE             1.000  -1230  0.18400   3O  2FE

THE PROPELLANT DENSITY IS 0.06884 LB/CU-IN OR 1.9056 GM/CC
THE TOTAL PROPELLANT WEIGHT IS 100.0000 GRAMS

NUMBER OF GRAM ATOMS OF EACH ELEMENT PRESENT IN INGREDIENTS

 2.264628 H      1.132314 C      0.642877 N      3.079730 O
 0.642877 K      0.012523 FE

```

Une partie des informations est automatiquement prise du fichier *pepcoded.daf*, qui est un fichier texte qui contient les informations suivantes sur les ingrédients :

- Nom de l'ingrédient
- Formule chimique
- « Chaleur de formation » (qui est en fait l'enthalpie de formation), en calories/gramme
- Densité massique, en livres/pouce cubique

Ces informations sont réfléchies dans les résultats précédents, où D-H (delta-heat) est l'enthalpie de formation, DENS est la densité des constituants et COMPOSITION est la formule chimique. La densité idéale du propulseur qui en résulte est également donnée, et est calculée grâce à la formule suivante :

$$\rho_p = \frac{1}{\frac{f_a}{\rho_a} + \frac{f_b}{\rho_b} + \frac{f_c}{\rho_c} + \dots} \quad \text{équation 1}$$

Comme détaillé dans la section théorique sur le grain de propulseur.

Ex. : DENS : $1/(0,65/0,0767 + 0,34/0,0567 + 0,01/0,184) = 0,06884$ livre/pouce cube

Le nombre d'atomes-gramme de chaque élément présent dans les ingrédients est ensuite listé. Ceci indique combien d'atomes relatifs de chaque élément sont présent dans la multitude d'ingrédients qui se combinent pour former les produits de combustion. Même si il s'agit d'une information clé pour le programme, il n'a aucune utilité particulière pour l'utilisateur. Pour référence, on le calcule comme la masse sur le ratio de masse moléculaire pour un ingrédient particulier, multiplié par le nombre de moles pour un élément particulier, additionné pour chaque ingrédient.

La prochaine portion des résultats présente les **conditions de combustion de la chambre**, comme montré ci-dessous :

```
*****CHAMBER RESULTS FOLLOW*****
T(K)  T(F)  P(ATM)  P(PST)  ENTHALPY  ENTROPY  CP/CV  GAS  RT/V
1733. 2659.  68.02  1000.00  -134.64   163.44  1.1280  2.297  29.614

SPECIFIC HEAT (MOLAR) OF GAS AND TOTAL=  10.801  15.381
NUMBER MOLES GAS AND CONDENSED=  2.2970  0.3179

 0.87508 H2O          0.41818 CO2          0.40865 CO           0.32138 N2
 0.30541 K2CO3*      0.24164 H2           0.03037 KHO          0.01242 FeO*
 1.30E-03 K          1.70E-04 K2H2O2      8.55E-05 FeH2O2      6.85E-05 NH3
 1.80E-05 H          1.05E-05 KH          4.87E-06 KCN         3.75E-06 HO
 2.13E-06 CH2O       2.12E-06 CH4         1.63E-06 CNH

THE MOLECULAR WEIGHT OF THE MIXTURE IS  38.243
```

La première rangée indique la température de combustion (en Kelvins et en degrés F), la pression de la chambre comme spécifié, l'enthalpie totale de la mixture (kcal/masse du système), entropie totale du système (cal/K/masse du système), CP/CV, qui est le taux de chaleur spécifique, GAS (nombre de moles de gaz dans la mixture), et RT/V (un facteur de conversion qui n'est pas utilisé habituellement). Notez que la masse du système dans l'exemple est de 100 grammes.

Les seuls paramètres importants ici sont :

- Température de combustion : Aussi appelé *Température adiabatique de la flamme*, et est déterminé par une méthode décrite dans la section Théorie de la combustion. Généralement, le plus que la température est élevée, le plus élevé sera l'impulsion spécifique. Deux facteurs doivent être considérés, par contre. Une température plus élevée requiert un fuselage et une tuyère plus robustes, de l'isolation ou des couches ablatives. Notez que la température de la chambre est la *température de stagnation* que la tuyère verra et le design doit en tenir compte. De basses températures de combustion, comme prédites par le programme, peuvent ne pas être viables en réalité. Par exemple, une formulation qui prédit une température de chambre de 1000 K ne brûlera probablement pas du tout.
- CP/CV : Le taux de chaleur spécifique, k , pour la mixture aux conditions de combustion de la chambre, est la valeur correcte à utiliser lorsqu'on calcule la *vitesse caractéristique* (c étoilé) et la *pression de la chambre*, comme décrit dans les sections précédentes. La valeur de CP/CV est calculée à partir des équations suivantes :

$$k = \frac{Cp_{mix}}{Cp_{mix} - R} \quad \text{où} \quad Cp_{mix} = \frac{1}{n} \sum_i (n_i Cp_i + n_s C_s) \quad \text{équations 2 et 3}$$

avec les détails sur la notation et l'usage des équations procurées dans la section Notes techniques.

- GAS : Le nombre de moles de produits de combustion *gazeux* dans une mixture de produits (qui peut aussi contenir de la matière en phase condensée). Cette valeur est utilisée pour calculer la masse molaire effective, M , de la mixture des produits, qui est obtenu en divisant le nombre de moles de gaz par la masse du système. Par exemple, $M = 100 / 2,297 = 43.54$ g/mol. Ceci est la masse moléculaire appropriée à utiliser dans les équations de gaz dynamique décrit dans les sections précédentes.

Les deux prochaines lignes indiquent les valeurs de la chaleur molaire spécifique des produits gazeux et de la mixture, (cal/mol/K), et sont fournies pour référence seulement. La ligne suivante indique les valeurs du nombre de moles de gaz (répété) et le nombre de moles de produits en phase condensée, qui peuvent être des solides ou des liquides. Cette information est intéressante, puisqu'elle procure le taux molaire de produits gazeux/condensés.

Les prochaines lignes d'informations nous indiquent le nombre de moles de chaque constituant des produits de combustion. Les noms des produits suivis de * sont en phase liquide et le & indique la phase solide; tous les autres sont en phase gazeuse. Ces résultats permettent à l'utilisateur de calculer la *fraction massique de la phase condensée*, qui est obtenue en divisant la masse de la phase condensée par la masse du système, et où la

masse de n'importe quel constituant est donné par le nombre de moles multipliés par la masse moléculaire de ce constituant.

Ex. : Fraction massique de la phase condensée =

$$((0,30541) 138,2 + 0,01242 (71,9)) / 10 = 0,422$$

Plusieurs produits de combustion sont présents en quantités négligeables, et jouent un rôle minime dans le processus global. Pour l'exemple ci-dessus, les seuls produits significatifs sont H₂O, K₂CO₃, CO₂, H₂, CO, N₂ et peut-être KOH et FeO.

Pour les meilleures performances, des masses moléculaires faibles sont désirables, pour que la masse moléculaire effective de la mixture soit minimisée. Des produits avec une faible masse moléculaire dans l'exemple ci-dessus sont H₂O, H, H₂, CH₄, CO, NH₃ et OH.

La prochaine ligne dans la portion ci-dessus des résultats donne la masse moléculaire de la mixture (parfois dénotée MW), qui est donnée par la somme de la fraction molaire, pour chaque constituant, multipliée par la masse moléculaire, comme montré ci-dessous :

$$M_{mix} = \sum_i f_{mi} M_i \quad \text{Équation 4}$$

Cette valeur de la masse moléculaire devrait être négligée puisqu'elle ne sert à rien quant à la performance de la fusée.

La prochaine partie des résultats présente les **conditions d'échappement de la tuyère**, comme montré ci-dessous :

```

*****EXHAUST RESULTS FOLLOW*****
T(K)  T(F)  P(ATM)  P(PST)  ENTHALPY  ENTROPY  CP/CV  GAS  RT/U
1169. 1646.  1.00    14.70   -161.60   163.44  1.1325  2.266  0.441

SPECIFIC HEAT (MOLAR) OF GAS AND TOTAL=  9.969  14.803
NUMBER MOLS GAS AND CONDENSED=  2.2656  0.3334

  0.77686 H2O      0.51521 CO2      0.35490 H2      0.32141 N2
  0.32090 K2CO3&  0.29614 CO      0.01250 FeO&    0.00101 KHO
  4.62E-05 K      1.17E-05 NH3    2.42E-06 CH4    1.75E-06 K2H2O2

THE MOLECULAR WEIGHT OF THE MIXTURE IS  38.475

```

Le format de ces résultats est identique à ceux de la chambre. Les valeurs représentent les conditions au *plan de sortie* de la tuyère.



Quelques points qu'il faut noter :

- La température des produits de combustion a chuté significativement, puisque l'énergie thermique a été convertie en énergie cinétique. La température de sortie peut être calculée à partir de l'équation 4 de la section Théorie de la tuyère.

$$T_e = \frac{T_o}{1 + \frac{k-1}{2} M_e^2} \quad \text{où} \quad M_e = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{P_o}{P_e} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad \text{équations 5 et 6}$$

où T_o est la température de la chambre, P_o/P_e est le ratio de pression chambre/sortie, M_e est le nombre de Mach du flux à la sortie, et k est le CP/CV pour les conditions d'échappement. Notez que la valeur donnée dans les résultats est pour des conditions *d'équilibre variable* qui sont expliquées plus tard.

- La pression de la chambre a baissée à une atmosphère, la condition de design.
- CP/CV et le nombre de moles de gaz ont variés subtilement, reflétant le changement de composition et de température de l'échappement lorsqu'il traverse la tuyère.
- Similairement, la chaleur spécifique et le nombre de moles d'espèces en phase condensée ont changés par rapport aux conditions de la chambre.
- La composition des produits a changée de façon intéressante. Il y a moins de constituants négligeables. Ceci s'explique par le fait que la température est plus basse et il y a moins d'occurrence de *dissociation* (rupture en plus petites molécules) des plus gros composés. Il faut également noter que les produits liquides sont devenus solides.

La prochaine portion des résultats présente la **performance** d'un moteur de fusée équipée avec ce propulseur et la tuyère spécifiée :

```
*****PERFORMANCE:  FROZEN ON FIRST LINE, SHIFTING ON SECOND LINE*****
IMPULSE  IS EX      T*      P*      C*      ISP*  OPT-EX  D-ISP      A*M  EX-T
 151.6   1.1326   1625.   39.31   2967.9   10.22  288.9   0.09227  1057.
 153.2   1.1058   1647.   39.63   3025.2   114.3  10.82  291.9   0.09405  1169.
```

La performance est donnée pour des conditions d'équilibre **fixe** ou **variable**.

Que veulent dire ces termes? Un équilibre fixe signifie que la composition chimique de l'échappement *ne varie pas* lorsque le flux traverse la tuyère (la composition des produits est établie dans la chambre à combustion). Un équilibre variable suppose qu'un équilibre chimique instantané est établi lorsque le gaz prend de l'expansion au niveau de la tuyère, «variant» la composition continuellement.

Pourquoi les deux résultats sont-ils fournis? En raison du très court passage dans la tuyère, il n'est pas confirmé si il y a ou non un temps suffisant pour les réactions chimiques d'avoir lieu comme prédit par le modèle d'équilibre variable. La géométrie joue également un rôle, puisque de plus longues tuyères résultent en de plus longues périodes de passage.

Quel résultat utiliser?

Pour des moteurs amateurs, où les tuyères sont petites en comparaison avec celles de fusées professionnelles, on considère le modèle fixe plus réaliste. Pour la tuyère du

moteur de fusée Kappa, on a calculé que le temps que prend le flux pour traverser la tuyère est de 430 microsecondes!

Dans la portion performance des résultats, la première rangée présente l'impulsion spécifique idéale (IMPULSE), l'exposant isentropique (IS EX), la température du flux au col (T*) et la pression au col (P*), la vitesse caractéristique (C*), l'impulsion de vacuum (ISP*), le ratio d'expansion optimal (OPT-EX), la densité Isp (D-ISP), le taux aire/flux de masse du col (A*M), et la température du plan de sortie (EX-T).

Ce qui suit est une discussion brève de chaque résultat :

- **L'impulsion spécifique idéale** est l'indicateur clé du potentiel de performance, et peut être considéré de mettre en relation la *poussée produite par unité de masse* (1 lb ou 1 kg) du propulseur sur un *temps de combustion d'une seconde*. L'impulsion spécifique idéale peut être déterminée à partir de l'équation 7 de la section théorique sur l'impulsion et C* :

$$I_{sp} = \frac{1}{g} \sqrt{2T_o \left(\frac{R'}{M} \right) \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad \text{équation 7}$$

où k est pris comme la moyenne de CP/CV pour les conditions de la chambre et de l'échappement, et M comme la masse moléculaire effective moyenne pour les conditions de la chambre et de l'échappement.

- **L'exposant isentropique** est le même que k ou CP/CV pour un gaz parfait tel que $PV^k = \text{constante}$ (P=pression; V=volume). Puisque le gaz n'est pas parfait, les valeurs de IS EX et CP/CV ne concordent pas.
- **T* et P*** sont des valeurs *critiques* de la température et de la pression du flux où la vitesse du flux est Mach un, c'est-à-dire au col. Ceux-ci peuvent être calculés à partir des équations 4 et 6 de la section théorique sur la tuyère. Les unités sont des Kelvins et des atmosphères, respectivement.

$$T^* = \frac{T_o}{1 + \frac{k-1}{2}} \quad \text{et} \quad P^* = \frac{P_o}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}} \quad \text{équations 8 et 9}$$

- **C*** est la vitesse caractéristique d'échappement (c étoilé), avec des unités de pieds/sec. Ce paramètre peut être considéré à être une figure de mérite thermodynamique pour un propulseur particulier, et est donné par l'équation 3 de la section théorique sur l'impulsion et C* :

$$C^* = \sqrt{\frac{(R'/M)T_o}{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}} \quad \text{équation 10}$$

- **ISP*** est l'impulsion de vacuum qui serait obtenu par une tuyère sonique dans le travail d'un moteur captant l'air, et peut ainsi être ignoré.
- **OPT-EX**, le ratio d'expansion optimale (A_e/A_t) est un paramètre important dans le design de la tuyère. Cette valeur définit le ratio de l'aire de sortie et de l'aire du col de la tuyère, et mesure ainsi le diamètre du cône de divergence, où $D_e = D_t \sqrt{A_e/A_t}$. Ce ratio peut être déterminé à partir de l'équation 14 de la section théorique sur la tuyère :

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_e}{P_o}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right) \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}} \quad \text{équation 11}$$

où k est la valeur de CP/CV pour les conditions d'échappement.

- L'impulsion spécifique de densité, D-ISP, est un paramètre intéressant. Il est défini comme le produit de l'impulsion spécifique et la gravité spécifique de propulseur, ou $I_d = Isp\delta_p$ (la gravité spécifique est numériquement égale à la densité, en gramme/cc. Une haute valeur de Isp de densité est importante pour le design de moteurs compacts, où le volume est primordial.
- **A*M** («A-star M») est le ratio de l'aire du col de la tuyère et du taux de flux de la masse exprimé en in²-sec/lb. L'usage de cette valeur m'est inconnue.
- **EX-T** est la température du plan de sortie de la tuyère (Kelvins) et peut être déterminée à partir de l'équation 5 montrée précédemment.

Comparaison des équations de performance à GUIPEP

Le tableau suivant montre une comparaison intéressante entre les résultats présentés par GUIPEP et les mêmes résultats calculés par l'usage des équations de performance présentés plus haut, qui sont considérées comme «approximatives». Ils sont tout de même plutôt similaires.

Paramètre		Équation	Calculée	GUIPEP
Vitesse caractéristique	c*	10	2966	2968
Impulsion spécifique	Isp	7	151,1	151,6
Ratio d'expansion optimal	Ae/At	11	10,22	10,22

Température critique	T*	8	1629	1625
Pression critique	P*	9	39,38	39,31
Température de plan de sortie	Te	5	1058	1057

Limitations de GUIPEP

Jusqu'à un certain point, la précision de résultats est dépendante du fichier JANNAF.DAT qui contient les données de chaleur de formation des espèces de réactions utilisées par le programme. La liste d'espèces est limitée, et pour des combinaisons de propulseurs inhabituels, les produits de réaction peuvent ne pas être présents dans la liste. Le résultat est un échec du programme, ou des résultats erronés. Un bon exemple est le propulseur zinc-sulphur, pour lequel GUIPEP ne procure aucune solution. La raison est que le produit principal de la combustion, le sulfure de zinc, n'est pas présent dans la liste des espèces de réactions.

Comme mentionné dans l'introduction, le *taux de combustion* du propulseur n'est pas donné par GUIPEP, et il n'y a aucune indication procurée qui nous indique si une concoction particulière de propulseur sera *auto combustible*. Même s'il est évident que cette sorte de résultats dépasse l'intention de GUIPEP, le fait doit être gardé en tête lorsqu'on évalue un propulseur. Un bon exemple sont les propulseurs à base de nitrate d'ammonium (AN). Même si GUIPEP présente typiquement des chiffres de performance élevés, en réalité, le taux de combustion est habituellement si lent que le propulseur s'éteindra par lui-même. Aussi, l'addition de métaux comme l'aluminium améliore la performance significativement pour beaucoup de propulseurs, selon les résultats de GUIPEP. Ceci n'est pas habituellement le cas en réalité, où une grande quantité du métal ne brûlera pas sauf la température de réaction du propulseur est très élevée et les dimensions des particules très petites. Des limitations physiques peuvent également diminuer la performance d'un propulseur prometteur. Une forte densité des solides prédit souvent de meilleures performances, mais en pratique, il est difficile d'atteindre une telle densité en raison des limitations de l'adhésion des substances.

Une autre limitation, relate à la prédiction de la performance des propulseurs avec un pourcentage significatif de particules en phase condensée dans l'échappement (flux à deux phases). La valeur de CP/CV et l'exposant isentropique utilisés par GUIPEP pour déterminer tous les paramètres de performance sont calculés d'une *mixture* de particules, comme montré dans l'équation 1 de la section théorique sur le flux à deux phases. Par contre, pour un flux à travers la tuyère, un exposant isentropique modifié devrait être utilisé, comme donné par l'équation 2 dans cette même section. Pour des propulseur avec une fraction minimale de particules en phase condensée (<10%), l'effet global est probablement négligeable. Mais pour un propulseur comme le KN-Sucrose, où la fraction de particules en phase condensée est très élevée (44%), l'effet est plus significatif. Comme exemple, la valeur de chambre de l'exposant isentropique est calculée par l'équation 2 est $k=1,04$, alors que la valeur donnée par l'équation 1 et GUIPEP est $k=1,13$. La différence en impulsion spécifique idéale est $I_{sp}=166$ sec contre $I_{sp}=153$ sec, respectivement.